3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire 2.13. *1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

2. L'ensemble $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.

Définition 2.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition 2.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

2.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Théorème 2.16 (Cardinal de $\mathbb{R}$, Cantor)**.** *L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (Démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □

Théorème 2.17 (Cantor, HP)**.** *Soit X un ensemble infini. Alors Card$(X) <$ Card$(\mathcal{P}(X))$ (i.e. X est subpotent à $\mathcal{P}(X)$, mais pas équipotent).*

Éléments de preuve. S'il existe une surjection $f : X \to P(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. □

Remarque 2.18. *En quoi le résultat précédent empêche-t-il l'existence d'un « ensemble des ensembles » ?*