Lemme 2.9 (Inversibilité à gauche ou droite des injections et surjections)**.** *Soit $f : E \to F$.*

1. *Si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, et g est alors surjective.*
2. *Si f est surjective, il existe $g : E \to F$ telle que $f \circ g = id_F$, et g est alors injective.*

Éléments de preuve. On construit g associant à y un antécédent de ses antécédents. Dans le premier cas, on n'a pas le choix quand on est dans l'image de f, et sinon, on définit g comme on veut. Dans le deuxième cas, on doit choisir parmi les antécédents de y. □

Remarque 2.10.
- *Ce sont en fait des équivalences.*
- *On utilise l'axiome du choix (qui affirme la possibilité de pouvoir faire simultanément une infinité de choix).*

Proposition 2.11 (Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est au plus dénombrable*

(ii) *il existe une fonction injective $f : E \to \mathbb{N}$.*

(iii) *il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \to E$.*

Éléments de preuve.
- $(i) \implies (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique.
- $(ii) \implies (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection
- $(iii) \implies (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ?
- $(ii) \implies (i)$: corestriction à l'image.

□

2.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition 2.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.**
1. *Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable.*
2. *Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable.*
3. *Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve.
1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$
2. Récurrence

3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire 2.13. *1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

2. L'ensemble $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.

Définition 2.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition 2.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

2.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Théorème 2.16 (Cardinal de $\mathbb{R}$, Cantor)**.** *L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (Démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □

Théorème 2.17 (Cantor, HP)**.** *Soit X un ensemble infini. Alors Card$(X) <$ Card$(\mathcal{P}(X))$ (i.e. X est subpotent à $\mathcal{P}(X)$, mais pas équipotent).*

Éléments de preuve. S'il existe une surjection $f : X \to P(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. □

Remarque 2.18. *En quoi le résultat précédent empêche-t-il l'existence d'un « ensemble des ensembles » ?*