2. Dénombrabilité

2.1 Cardinaux infinis

Définition 2.1 (Ensembles de même cardinal)**.** *Soit E et F deux ensembles.*

- *On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $f : E \to F$. On dit aussi que E est équipotent à F.*
- *On dit que E est subpotent à F (ou que le cardinal de E est strictement inférieur à celui de F) s'il existe une injection de E dans F.*

Remarque 2.2 (HP)**.**
- *On peut montrer que la relation de subpotence vérifie les propriétés d'une relation d'ordre sur les classes cardinales. L'antisymétrie provient d'un théorème classique dû à Cantor et Berstein, affirmant que s'il existe une injection $f : E \to F$, et une injection $g : F \to E$, alors il existe une bijection $E \to F$.*
- *Avec l'axiome du choix, on peut montrer que cette « relation d'ordre » est totale.*

Avertissement 2.3. *Deux ensembles vérifiant une inclusion stricte $E \subsetneq F$ peuvent être de même cardinal. Pourtant F contient strictement plus d'éléments que E.*

Exemple 2.4 (Hôtel de Hilbert)**.** *$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) = n + 1$ est une bijection. Donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont même cardinal.*

2.2 Dénombrabilité

Définition 2.5 (Ensemble dénombrable)**.** *Soit E un ensemble. On dit que :*

- *E est dénombrable s'il est de même cardinal que $\mathbb{N}$;*
- *au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Ainsi, E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Proposition 2.6 (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)**.** *Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Éléments de preuve. Construire une bijection en diagonales. Ou bien utiliser une bijection classique entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^*$, basée sur l'étude des facteurs pairs de la décomposition de n en produit de facteurs premiers. □

Lemme 2.7. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Considérer un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non fini. Construire par récurrence une application injective de $[0, n]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. □

Proposition 2.8 (Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Éléments de preuve. Un sens est évident par les définitions de la finitude ou de la dénombrabilité. L'autre provient du lemme. □

Lemme 2.9 (Inversibilité à gauche ou droite des injections et surjections)**.** *Soit $f : E \to F$.*

1. *Si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, et g est alors surjective.*
2. *Si f est surjective, il existe $g : E \to F$ telle que $f \circ g = id_F$, et g est alors injective.*

Éléments de preuve. On construit g associant à y un antécédent de ses antécédents. Dans le premier cas, on n'a pas le choix quand on est dans l'image de f, et sinon, on définit g comme on veut. Dans le deuxième cas, on doit choisir parmi les antécédents de y. □

Remarque 2.10.
- *Ce sont en fait des équivalences.*
- *On utilise l'axiome du choix (qui affirme la possibilité de pouvoir faire simultanément une infinité de choix).*

Proposition 2.11 (Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est au plus dénombrable*

(ii) *il existe une fonction injective $f : E \to \mathbb{N}$.*

(iii) *il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \to E$.*

Éléments de preuve.
- $(i) \implies (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique.
- $(ii) \implies (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection
- $(iii) \implies (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ?
- $(ii) \implies (i)$: corestriction à l'image.

□

2.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition 2.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.**
1. *Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable.*
2. *Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable.*
3. *Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve.
1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$
2. Récurrence