2. Dénombrabilité

2.1 Cardinaux infinis

Définition 2.1 (Ensembles de même cardinal)**.** *Soit E et F deux ensembles.*

- *On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $f : E \to F$. On dit aussi que E est équipotent à F.*
- *On dit que E est subpotent à F (ou que le cardinal de E est strictement inférieur à celui de F) s'il existe une injection de E dans F.*

Remarque 2.2 (HP)**.**
- *On peut montrer que la relation de subpotence vérifie les propriétés d'une relation d'ordre sur les classes cardinales. L'antisymétrie provient d'un théorème classique dû à Cantor et Berstein, affirmant que s'il existe une injection $f : E \to F$, et une injection $g : F \to E$, alors il existe une bijection $E \to F$.*
- *Avec l'axiome du choix, on peut montrer que cette « relation d'ordre » est totale.*

Avertissement 2.3. *Deux ensembles vérifiant une inclusion stricte $E \subsetneq F$ peuvent être de même cardinal. Pourtant F contient strictement plus d'éléments que E.*

Exemple 2.4 (Hôtel de Hilbert)**.** *$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) = n + 1$ est une bijection. Donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont même cardinal.*

2.2 Dénombrabilité

Définition 2.5 (Ensemble dénombrable)**.** *Soit E un ensemble. On dit que :*

- *E est dénombrable s'il est de même cardinal que $\mathbb{N}$;*
- *au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Ainsi, E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Proposition 2.6 (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)**.** *Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Éléments de preuve. Construire une bijection en diagonales. Ou bien utiliser une bijection classique entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^*$, basée sur l'étude des facteurs pairs de la décomposition de n en produit de facteurs premiers. □

Lemme 2.7. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Considérer un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non fini. Construire par récurrence une application injective de $[0, n]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. □

Proposition 2.8 (Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Éléments de preuve. Un sens est évident par les définitions de la finitude ou de la dénombrabilité. L'autre provient du lemme. □