Introduction

Nous faisons dans ce chapitre quelques rappels sur les cardinaux finis, et leur utilisation dans des questions de dénombrement. Dans un second temps, nous quittons les révisions pour aborder le problème des cardinaux infinis, beaucoup moins intuitif, l'objectif étant l'étude des ensembles de même cardinal que $\mathbb{N}$, qu'on appelle ensembles dénombrables.

1. Rappels sur les cardinaux finis

1.1 Ensembles finis, cardinaux

Définition 1.1 (Cardinal d'un ensemble fini)**.** *Soit E un ensemble.*

- *On dit que E est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $[1, n] \to E$.*
- *L'entier n est alors unique, est appelé cardinal de E, et est noté $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$ ou $\sharp E$.*

Éléments de preuve. L'unicité de n provient du fait qu'il ne peut pas exister de bijection de $[1, n]$ dans $[1, m]$ si $n \neq m$, ce qui n'est pas si évident que cela à montrer si on ne dispose d'aucun outil de cardinalité. Cela peut se faire en montrant par récurrence sur n que si $m \neq n$ et $f : [1, n] \to [1, m]$, alors f n'est ni injective ni surjective. Pour passer de n à $n + 1$, considérer $f(n + 1)$. Quitte à composer par une transposition bijective, on peut considérer que $f(n + 1) = m + 1$, ce qui permet d'enlever n d'un côté, m de l'autre (avec une discussion à faire), pour se ramener à l'hypothèse de récurrence. □

Lemme 1.2 (Finitude des sous-ensembles)**.** *Tout sous-ensemble F de $[1, n]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[1, m]$, avec $m \leq n$.*

Éléments de preuve. On peut ranger les éléments de F dans l'ordre : $F = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}$. □

Proposition 1.3 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)**.** *Soit F un sous-ensemble de E. Si E est fini, alors F aussi.*

Éléments de preuve. Restreindre et corestreindre une bijection $E \to [1, n]$ et utiliser le lemme. □

1.2 Rappel des propriétés calculatoires sur les cardinaux

Lemme 1.4 (Réexpression du cardinal)**.** *Soit E un ensemble fini, et A un sous-ensemble de E. Alors*

$$|A| = \sum_{k \in E} \mathbb{I}_A(k).$$

Éléments de preuve. C'est évident intuitivement. Pour une bonne formalisation, par une bijection, on peut se ramener au cas où $A = [1, p]$ et $E = [1, n]$. □

Proposition 1.5 (Cardinal d'une union disjointe)**.** *Soit $A, B, A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.*

1. *Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.*
2. *Plus généralement, si pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Éléments de preuve. Le point 2 s'obtient du point 1 par récurrence. Le point 1 résulte du lemme et des propriétés des sommes. □

Proposition 1.6 (Cardinal d'un complémentaire). *Si $A \subset B$, alors $|\mathcal{C}_B A| = |B| - |A|$.*

Éléments de preuve. Écrire l'un des trois ensembles en jeu comme union disjointe des deux autres. □

Corollaire 1.7 (Cardinal d'un sous-ensemble). *Si $A \subset B$, alors $|A| \leq |B|$, avec égalité si et seulement si $A = B$.*

Éléments de preuve. Quel est le cardinal de $\mathcal{C}_B A$ lorsqu'on est dans le cas d'égalité ? □

Proposition 1.8 (Cardinal d'une union quelconque). *Soit A et B des ensembles finis. On a :*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Éléments de preuve. On peut décomposer en $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. □

Proposition 1.9 (Cardinal d'un produit cartésian).
1. *Soit A et B deux ensembles finis. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.*
2. *Plus généralement, soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors*

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Éléments de preuve. Le point 2 s'obtient du 1 par récurrence. Pour le point 1, découper en tranche, ou utiliser une bijection de $[0, nm-1]$ dans $[0, n-1] \times [0, m-1]$ définie par une opération arithmétique classique. □

1.3 Grands principes combinatories

Proposition 1.10 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal). *Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :*

1. *Si f est bijective, $Card(E) = Card(F)$.*
2. *Si f est injective, $Card(E) \leq Card(F)$.*
3. *Si f est surjective, $Card(E) \geq Card(F)$.*

Éléments de preuve. Restreindre ou corestreindre de façon adéquate, de sorte à se ramener à une bijection. □