3.2 Théorème de convergence dominée

Dans cette section, on donne, sans preuve, un outil extrêmement puissant pour étudier la limite d'une suite d'intégrales. On verra plus tard un autre résultat permettant de ń passer à la limite sous le signe $\int$ ż, lorsque la convergence des f_n est uniforme.

Théorème 3.5 (Théorème de convergence dominée, TCD, admis)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est c.p.m.

(ii) (f_n) converge simplement vers une fonction f.

(iii) (hypothèse de domination) il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$, intégrable sur I et telle que, sur l'intervalle I, on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi.$$

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Éléments de preuve. L'intégrabilité des f_n et de f provient des théorèmes de comparaison. Le reste de la preuve est (vraiment) hors-programme, le bon cadre n'étant pas celui de l'intégrale de Riemann, mais celui de l'intégrale de Lebesgue. Ce théorème sera donc admis. □

Exemple 3.6. *1. Déterminer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n dx$$

.

2. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$$

.

Remarque 3.7. *1. Lorsque la suite (f_n) est décroissante ce qui est le cas du premier exemple, alors on pourra toujours dominer la suite par f_0, à condition qu'elle soit intégrable.*

2. Lorsque la suite est croissante, et que la limite f est intégrable, alors on pourra dominer (f_n) par f. C'est le cas du deuxième exemple.

Complément sur les fonctions à variations bornées

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge

(ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(x)|dx < +\infty$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On définit pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} f(k) \quad \text{et} \quad I_N = \int_1^N f(x)dx$$

1. Montrer que pour tout $a < b$, on a :
$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |f'(t)|dt$$
2. Montrer que f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.
3. Soit $g(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \int_1^N f(x)dx + \frac{f(1) + f(N)}{2} + \int_1^N f'(x)g(x)dx$$
4. En déduire que :
$$\left|\sum_{k=1}^{N} f(k) - \int_1^N f(x)dx - \frac{f(1)}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\int_1^N |f'(x)|dx + \frac{|f(N)|}{2}$$
5. Montrer que la suite $(S_N - I_N)_{N\geq 1}$ converge.
6. Soit $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
7. Pour quelles valeurs de α les hypothèses (i), (ii), (iii) sont-elles vérifiées ?
8. Montrer que dans ce cas, la série $\sum \frac{\sin(\pi k)}{k^\alpha}$ converge.
9. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(\pi k)}{k^\alpha} - \int_1^N \frac{\sin(\pi x)}{x^\alpha}dx$ quand $N \to +\infty$.
10. Soit $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$.
11. Vérifier que f satisfait les hypothèses.
12. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln k)}{k}$ converge.
13. La convergence est-elle absolue ?

    Soit f vérifiant les mêmes hypothèses. On définit le reste :
$$R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(k) - \int_N^{+\infty} f(x)dx$$

14. Montrer que :
$$|R_N| \leq \frac{|f(N)|}{2} + \frac{1}{2}\int_N^{+\infty} |f'(x)|dx$$
15. En déduire que $R_N \to 0$ quand $N \to +\infty$.
16. Application : pour $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, donner un majorant de $|R_N|$.