Exercice 2.11. *Montrer la convergence et calculer la valeur de* $\int_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^2\, dt$.

Indice : On pourra admettre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2.12. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Étudier la convergence de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} t^a e^{it}\, dt$.

Exemple 2.13 (Relation remarquable de Γ)**.** *Montrer que pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 2.14. *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *continue et périodique de période strictement positive. Montrer que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

converge si et seulement si f *admet une primitive périodique*

Exercice 2.15. *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{C}$ *continûment dérivable. On suppose que les intégrales* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\int_0^{+\infty} |f'(t)|dt$ *convergent.*
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2.16. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *une fonction uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$ *qui admet une intégrale généralisée sur* $[0, +\infty[$. *Montrer que* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Études asymptotiques

On s'intéresse pour terminer à l'étude de 2 problèmes asymptotiques liés aux intégrales :

- Le comportement asymptotique d'intégrales dépendant de leur borne, en particulier le comportement de l'intégrale partielle lorsqu'on fait tendre une borne vers la borne de I, lorsque l'intégrale diverge, et de même, le comportement de l'intégrale reste en cas de convergence. On retrouvera ce type d'études pour les séries plus tard.
- L'étude de la convergence d'une suite d'intégrales

$$\int_J f_n$$

.

3.1 Intégration des relations de comparaison

Dans ce paragraphe, on suppose que $I = [a, b[$. Les résultats s'adaptent facilement au cas $]a, b[$.

Théorème 3.1 (Intégration des relations de comparaison dans le cas convergent)**.** *Soit* $f, g : I \to \mathbb{R}$. *On suppose que :*

- f *et* g *sont continues par morceaux.*
- g *est positive (ou au moins de signe constant) et intégrable en* b.

Alors :

1. *si* $f = O(g)$, *alors*

$$\int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right)$$

;

2. *si* $f = o(g)$*, alors*
$$\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right)$$
;
3. *si* $f \sim g$*, alors*
$$\int_x^b f \sim \int_x^b g$$
.

Exemple 3.2. 1. *Soit* $x > 0$*. Trouver un équivalent simple lorsque* y *tend vers 0 de*
$$\int_0^y t^{x-1}e^{-t}dt$$
.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. À l'aide d'une IPP, trouver un équivalent simple lorsque* y *tend vers* $+\infty$ *de*
$$\int_y^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$
.

Dans le cas divergent, ce sont les intégrales partielles qu'on pourra comparer.

Théorème 3.3 (Intégration des relations de comparaison dans le cas divergent)**.** *Soit* $f, g : I \to \mathbb{R}$*. On suppose que :*

- f *et* g *sont continues par morceaux.*
- g *est positive et non intégrable en* b*.*

Alors :

1. *si* $f = O(g)$*, alors*
$$\int_a^x f = O\left(\int_a^x g\right)$$
;
2. *si* $f = o(g)$*, alors*
$$\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$$
;
3. *si* $f \sim g$*, alors*
$$\int_a^x f \sim \int_a^x g$$
.

Exemple 3.4. 1. *Soit* $x < 0$*. Déterminer un équivalent en 0 de* $y \mapsto \int_y^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$*.*
2. *À l'aide d'une IPP, donner un équivalent simple de*
$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$
quand x *tend vers* $+\infty$*.*

3.2 Théorème de convergence dominée

Dans cette section, on donne, sans preuve, un outil extrêmement puissant pour étudier la limite d'une suite d'intégrales. On verra plus tard un autre résultat permettant de ń passer à la limite sous le signe $\int$ ż, lorsque la convergence des f_n est uniforme.

Théorème 3.5 (Théorème de convergence dominée, TCD, admis)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est c.p.m.

(ii) (f_n) converge simplement vers une fonction f.

(iii) (hypothèse de domination) il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$, intégrable sur I et telle que, sur l'intervalle I, on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi.$$

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Éléments de preuve. L'intégrabilité des f_n et de f provient des théorèmes de comparaison. Le reste de la preuve est (vraiment) hors-programme, le bon cadre n'étant pas celui de l'intégrale de Riemann, mais celui de l'intégrale de Lebesgue. Ce théorème sera donc admis. □

Exemple 3.6. *1. Déterminer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n dx$$

.

2. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$$

.

Remarque 3.7. *1. Lorsque la suite (f_n) est décroissante ce qui est le cas du premier exemple, alors on pourra toujours dominer la suite par f_0, à condition qu'elle soit intégrable.*

2. Lorsque la suite est croissante, et que la limite f est intégrable, alors on pourra dominer (f_n) par f. C'est le cas du deuxième exemple.