Remarque 2.4.
- *Selon les termes du programme, ń on applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variables usuels ż, ce qui est très vague. Cela englobe en tout cas les changements de variable affine. Pour le reste... c'est flou...*
- *Le théorème de changement de variable permet aussi de comparer la nature des intégrales. Donc c'est aussi un moyen d'étude de convergence.*

Exemple 2.5. *Déterminer la nature de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^\beta}\,dx$$

(intégrale de Bertrand).

Plus généralement, on peut énoncer :

Proposition 2.6 (Intégrales de Bertrand en +, HP)**.**
- *$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est intégrable en + si et seulement si $\alpha > 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) (i.e. $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique).*
- *$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

Éléments de preuve. À savoir faire car classique, bien que HP. Cela doit donc être refait en cas de nécessité.

- Le cas $\alpha \neq 1$ en + s'obtient facilement par comparaison à des intégrales de Riemann.
- On peut ramener l'étude en 0 à la précédente par changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

□

2.2 Intégration par parties

Définition 2.7 (Notation pour les limites aux bornes)**.** *Si f est une fonction définie sur I d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et si f admet des limites finies (à droite) en a et (à gauche) en b, on note*

$$[f(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Théorème 2.8 (Intégration par parties)**.** *Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) f et g sont de classe C^1 sur I;

(ii) le produit fg admet une limite finie en a^+ et en b^-.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ sont de même nature, et

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Remarque 2.9. *Selon les termes du programme, ń pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité ż, c'est à dire le caractère C^1 de f et g.*

Avertissement 2.10. *Sous l'hypothèse d'existence des limites de fg, la convergence des intégrales est préservée, mais pas l'intégrabilité, comme le montre l'exemple déjà étudié de*

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Exercice 2.11. *Montrer la convergence et calculer la valeur de* $\int_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^2\, dt$.

Indice : On pourra admettre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2.12. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Étudier la convergence de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} t^a e^{it}\, dt$.

Exemple 2.13 (Relation remarquable de Γ)**.** *Montrer que pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 2.14. *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *continue et périodique de période strictement positive. Montrer que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

converge si et seulement si f *admet une primitive périodique*

Exercice 2.15. *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{C}$ *continûment dérivable. On suppose que les intégrales* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\int_0^{+\infty} |f'(t)|dt$ *convergent.*
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2.16. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *une fonction uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$ *qui admet une intégrale généralisée sur* $[0, +\infty[$. *Montrer que* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Études asymptotiques

On s'intéresse pour terminer à l'étude de 2 problèmes asymptotiques liés aux intégrales :

- Le comportement asymptotique d'intégrales dépendant de leur borne, en particulier le comportement de l'intégrale partielle lorsqu'on fait tendre une borne vers la borne de I, lorsque l'intégrale diverge, et de même, le comportement de l'intégrale reste en cas de convergence. On retrouvera ce type d'études pour les séries plus tard.
- L'étude de la convergence d'une suite d'intégrales

$$\int_J f_n$$

.

3.1 Intégration des relations de comparaison

Dans ce paragraphe, on suppose que $I = [a, b[$. Les résultats s'adaptent facilement au cas $]a, b[$.

Théorème 3.1 (Intégration des relations de comparaison dans le cas convergent)**.** *Soit* $f, g : I \to \mathbb{R}$. *On suppose que :*

- f *et* g *sont continues par morceaux.*
- g *est positive (ou au moins de signe constant) et intégrable en* b.

Alors :

1. *si* $f = O(g)$, *alors*

$$\int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right)$$

;