- *Faire une (ou plusieurs) intégration(s) par parties de sorte à diminuer l'ordre de grandeur de l'intégrande, dans l'espoir de se ramener à une fonction intégrable. C'est ce qu'on a fait pour* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$*;*
- *Couper le domaine en tranches sur lesquelles* f *reste de signe constant, pour ensuite étudier la somme des intégrales sur ces tranches. Cela nous ramène à un problème sur les séries. Si la série obtenue diverge, c'est terminé, sinon, il faut encore contrôler ce qui se passe entre les points de la subdivision.*

2. Règles calculatoires

Cette section a pour but d'étendre au cas des intégrales généralisées les méthodes calculatoires établies pour les intégrales sur un segment, à savoir les changements de variable, et les intégrations par parties. Dans cette section, I désigne un intervalle de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$, les bornes étant indifféremment ouvertes ou fermées. On désigne toujours par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Changement de variables

Théorème 2.1 (Formule de changement de variable pour les intégrales généralisées)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$ *et* $\varphi : J \to I$*, où* J *est un autre intervalle de* $\mathbb{R}$*, d'extrémités* $\alpha < \beta$*. On suppose que :*

(i) f *est continue sur* I*;*

(ii) φ *est bijective, strictement croissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* J*.*

Alors les intégrales $\int_I f(x)\,dx$ *et* $\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *sont de même nature, et en cas de convergence,*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \quad \textit{i.e.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Le théorème de la bijection assure que $\lim_{x\to a} \varphi^{-1}(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to b} \varphi^{-1}(x) = \beta$. Ainsi, faire d'abord le changement de variable sur l'intégrale partielle $\int_A^B f(x)\,dx$, pour $a < A < B < b$, puis faire tendre A vers a et B vers b. □

Corollaire 2.2 (Adaptation pour un changement de variable strictement décroissant)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$ *et* $\varphi : J \to I$*, où* J *est un autre intervalle de* $\mathbb{R}$*, d'extrémités* $\alpha < \beta$*. On suppose que :*

(i) f *est continue sur* I*;*

(ii) φ *est bijective, strictement décroissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* J*.*

Alors les intégrales $\int_I f(x)\,dx$ *et* $\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *sont de même nature, et en cas de convergence,*

$$\int_I f(x)\,dx = -\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \quad \textit{i.e.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple 2.3. *On admet la valeur de l'intégrale de Gauss :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

1. *Que vaut* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$*?*
2. *En déduire la valeur de* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$*.*

Remarque 2.4.
- *Selon les termes du programme, ń on applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variables usuels ż, ce qui est très vague. Cela englobe en tout cas les changements de variable affine. Pour le reste... c'est flou...*
- *Le théorème de changement de variable permet aussi de comparer la nature des intégrales. Donc c'est aussi un moyen d'étude de convergence.*

Exemple 2.5. *Déterminer la nature de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^\beta}\,dx$$

(intégrale de Bertrand).

Plus généralement, on peut énoncer :

Proposition 2.6 (Intégrales de Bertrand en +, HP)**.**
- *$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est intégrable en + si et seulement si $\alpha > 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) (i.e. $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique).*
- *$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

Éléments de preuve. À savoir faire car classique, bien que HP. Cela doit donc être refait en cas de nécessité.

- Le cas $\alpha \neq 1$ en + s'obtient facilement par comparaison à des intégrales de Riemann.
- On peut ramener l'étude en 0 à la précédente par changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

□

2.2 Intégration par parties

Définition 2.7 (Notation pour les limites aux bornes)**.** *Si f est une fonction définie sur I d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et si f admet des limites finies (à droite) en a et (à gauche) en b, on note*

$$[f(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Théorème 2.8 (Intégration par parties)**.** *Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) f et g sont de classe C^1 sur I;

(ii) le produit fg admet une limite finie en a^+ et en b^-.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ sont de même nature, et

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Remarque 2.9. *Selon les termes du programme, ń pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité ż, c'est à dire le caractère C^1 de f et g.*

Avertissement 2.10. *Sous l'hypothèse d'existence des limites de fg, la convergence des intégrales est préservée, mais pas l'intégrabilité, comme le montre l'exemple déjà étudié de*

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$