Exercice 1.50. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de partie réelle strictement positive, P un polynôme réel non constant, et f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(t) = O(P(t)).$$

Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^\alpha} f(t)dt.$$

Définition 1.51 (Ensemble $L^1(I,\mathbb{K})$)**.** *On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I. C'est donc une partie de $C^0_m(I,\mathbb{K})$.*

Proposition 1.52 (Espace $L^1(I,\mathbb{K})$)**.** *$L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_m(I,\mathbb{K})$.*

Proposition 1.53 (Inégalité triangulaire dans $L^1(I,\mathbb{K})$)**.** *Soit $f \in L^1(I,\mathbb{K})$. Alors*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

On note dans la suite de ce paragraphe $L^1_c(I,\mathbb{K})$ le sous-espace de $L^1(I,\mathbb{K})$ constitué des fonctions intégrables sur I et continues. La notation n'est pas standard et n'apparaît pas dans le programme officiel. Il faut la réintroduire si vous l'utilisez.

Le résultat suivant a déjà été vu lorsque $I = [a,b]$. Le cas général s'en déduit en recollant deux intervalles semi-ouverts.

Proposition 1.54 (Positivité, et stricte positivité)**.** *Soit $f \in L^1_c(I,\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$. Alors $\int_I f \geq 0$, le cas d'égalité étant obtenu si et seulement si $f = 0$.*

Corollaire 1.55 (E.v.n $(L^1_c(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$)**.** *On définit, pour tout $f \in L^1_c(I,\mathbb{K})$,*

$$\|f\|_1 = \int_I |f|.$$

Alors $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1_c(I,\mathbb{K})$.

1.6 Bilan méthodologique

Méthode 1.56 (Étudier la convergence d'une intégrale)**.** *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$*

- *Étudier la c.p.m. sur $I =]a,b[$, voir si éventuellement f est (ou peut se prolonger en) une fonction c.p.m. sur $[a,b]$ (dans ce cas, il n'y a rien à faire) ou sur $[a,b[$ (ce qui évite d'avoir à couper en 2)*
- *S'il y a un problème de c.p.m. au milieu de l'intervalle, voir si on peut se ramener à des fonctions c.p.m. en subdivisant davantage l'intervalle.*
- *Commencer par l'étude de la borne en laquelle la convergence vous paraît la plus douteuse. S'il y a divergence en cette borne, il ne sera pas nécessaire d'étudier l'autre borne.*
- *Commencer par étudier l'intégrabilité en cette borne, notamment par comparaisons, puis en l'autre.*
- *Si la fonction n'est pas intégrable en l'une des 2 bornes, étudier la semi-convergence (il peut être intéressant de se ramener à un intervalle $[c,b]$ ou $]a,c]$, pour isoler les 2 bornes à étudier). Il n'y a pas de méthode standard, mais on pourra penser à l'une de ces possibilités :*
  - *faire un calcul explicite ;*

- *Faire une (ou plusieurs) intégration(s) par parties de sorte à diminuer l'ordre de grandeur de l'intégrande, dans l'espoir de se ramener à une fonction intégrable. C'est ce qu'on a fait pour* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$*;*
- *Couper le domaine en tranches sur lesquelles* f *reste de signe constant, pour ensuite étudier la somme des intégrales sur ces tranches. Cela nous ramène à un problème sur les séries. Si la série obtenue diverge, c'est terminé, sinon, il faut encore contrôler ce qui se passe entre les points de la subdivision.*

2. Règles calculatoires

Cette section a pour but d'étendre au cas des intégrales généralisées les méthodes calculatoires établies pour les intégrales sur un segment, à savoir les changements de variable, et les intégrations par parties. Dans cette section, I désigne un intervalle de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$, les bornes étant indifféremment ouvertes ou fermées. On désigne toujours par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Changement de variables

Théorème 2.1 (Formule de changement de variable pour les intégrales généralisées)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$ *et* $\varphi : J \to I$*, où* J *est un autre intervalle de* $\mathbb{R}$*, d'extrémités* $\alpha < \beta$*. On suppose que :*

(i) f *est continue sur* I*;*

(ii) φ *est bijective, strictement croissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* J*.*

Alors les intégrales $\int_I f(x)\,dx$ *et* $\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *sont de même nature, et en cas de convergence,*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \quad \textit{i.e.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Le théorème de la bijection assure que $\lim_{x\to a} \varphi^{-1}(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to b} \varphi^{-1}(x) = \beta$. Ainsi, faire d'abord le changement de variable sur l'intégrale partielle $\int_A^B f(x)\,dx$, pour $a < A < B < b$, puis faire tendre A vers a et B vers b. □

Corollaire 2.2 (Adaptation pour un changement de variable strictement décroissant)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$ *et* $\varphi : J \to I$*, où* J *est un autre intervalle de* $\mathbb{R}$*, d'extrémités* $\alpha < \beta$*. On suppose que :*

(i) f *est continue sur* I*;*

(ii) φ *est bijective, strictement décroissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* J*.*

Alors les intégrales $\int_I f(x)\,dx$ *et* $\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *sont de même nature, et en cas de convergence,*

$$\int_I f(x)\,dx = -\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \quad \textit{i.e.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple 2.3. *On admet la valeur de l'intégrale de Gauss :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

1. *Que vaut* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$*?*
2. *En déduire la valeur de* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$*.*