□

Proposition 1.34 (Linéarité). *Soit I un intervalle quelconque de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g \in C_m^0(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont convergentes, alors } \int_a^b f + \lambda g \text{ aussi, et}$$
$$\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$
2. *Si*
$$\int_a^b f \text{ est convergente et } \int_a^b g \text{ est divergente, alors } \int_a^b (f+g) \text{ est divergente.}$$

Proposition 1.35 (Positivité et croissance). *Soit I un intervalle quelconque de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications c.p.m. sur I.*

1. *(Positivité) Si f est positive sur I, et*
$$\int_a^b f \text{ est convergente, alors } \int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$
2. *(Croissance) Si $f \leq g$ sur I, et si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont convergentes, alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$
3. *(Stricte positivité) Si f est continue et positive sur I, non partout nulle, et d'intégrale convergente, alors*
$$\int_a^b f > 0.$$

1.5 Intégrabilité

Comme pour les séries, l'étude de la convergence d'une intégrale peut parfois s'étudier en étudiant d'abord la convergence de l'intégrale de son module. Cela permet de ramener l'étude au cas d'une intégrale d'une fonction positive, et donc d'exploiter les méthodes du paragraphe précédent, notamment les techniques de comparaison.

Définition 1.36 (Intégrabilité).
1. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que f est intégrable ou que*
$$\int_a^b f(t)\,dt$$
est absolument convergente, si :

   (i) f est continue par morceaux sur $[a, b[$;

   (ii)
$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$
   est convergente.

2. *Soit f définie sur un intervalle I tel que $\sup I = b$, et $b \notin I$. On dit que f est intégrable en b s'il existe $c \in I$ tel que $f_{|[c,b[}$ soit intégrable.*

3. *De même si $a = \inf(I)$, on dit que f est intégrable en a s'il existe $c \in I$ tel que $f_{|]a,c[}$ soit intégrable.*

Avertissement 1.37.
- *Attention à bien avoir la bonne terminologie, l'intégrabilité d'une fonction se définit par la convergence de*
$$\int_a^b |f|\,dt$$
et non de
$$\int_a^b f$$
.
- *De plus, la notion d'intégrabilité porte sur la fonction, et non sur l'intégrale.*
- *Faire le parallèle avec la notion de sommabilité des familles $(a_i)_{i\in I}$.*

Remarque 1.38. 1. *Si f est c.p.m sur $[a,b[$ et de signe constant, la convergence de*
$$\int_a^b f \text{ équivaut à l'intégrabilité de } f$$
. Cela reste en particulier vrai si f est de signe constant au voisinage de b.

2. *La notion d'intégrabilité en b est une notion locale, qui permet d'évacuer momentanément les problèmes qu'il pourrait y avoir à un autre endroit de l'intervalle I.*

Proposition 1.39 (Intégrabilité aux bornes vs intégrabilité globale)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de bornes a et b. On suppose que f est c.p.m sur I. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- *f est intégrable sur I*
- *f est intégrable en a et en b.*

Remarque 1.40. *Avec les notations de la proposition, si $a \in I$, l'intégrabilité en a est acquise, et il ne reste dans le second point que l'intégrabilité en b à étudier.*

La propriété importante permettant de ramener dans beaucoup de situations l'étude de la convergence d'une intégrale à l'étude de l'intégrabilité de l'intégrande est similaire à la propriété reliant la convergence absolue et la convergence des séries.

Proposition 1.41 (CVA implique CV)**.** *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$. Si f est intégrable, alors*
$$\int_a^b f(t)\,dt$$
est convergente.

Éléments de preuve.
- On commence par étudier le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en décomposant $f = f^+ - f^-$, et en utilisant le fait que $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$. Le théorème de comparaison et la linéarité permettent de conclure.
- On passe de même de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ en décomposant f en partie réelle et partie imaginaire.

□

Exemple 1.42. *Montrer la convergence de*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

.

Avertissement 1.43. *Attention, comme pour les séries, la réciproque est fausse : il peut exister des fonctions f telles que*

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

converge sans que f soit intégrable. On dira dans ce cas que

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

est semi-convergente.

Exemple 1.44.

- *En minorant*

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

, montrer que $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur

$$[1, +\infty[$$

.

- *En effectuant une IPP sur l'intégrale partielle, montrer que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

est semi-convergente.

Ainsi, l'étude d'une intégrale généralisée passe souvent par l'étude d'une intégrale de fonction positive. Pour cette raison, il peut être commode de remarquer qu'on peut toujours donner une valeur dans $\mathbb{R}$ à l'intégrale d'une fonction positive :

Proposition 1.45 (Intégrale d'une fonction positive non intégrable)**.** *Soit I un intervalle quelconque, de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Si f est c.p.m. sur I, positive, et non intégrable, alors*

$$\lim_{x \to a^+} \lim_{y \to b^-} \int_x^y f(t)\, dt = +\infty$$

. On s'autorise à écrire dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\, dt = +\infty$$

.

Remarque 1.46.

1. *Selon les termes du programme, ń pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence ż.*
2. *Cela signifie concrètement que si f est positive, on peut commencer à manipuler (calculer ou majorer)*

$$\int_a^b f$$

sans s'être préoccupé au préalable de la convergence de cette intégrale.

3. *Cette remarque vaut notamment pour l'étude de l'intégrabilité de f. On peut toujours considérer*

$$\int_a^b |f|$$

, sans justification préalable de sa convergence. Dans ce contexte, selon les termes du programme officiel, ń un calcul montrant que

$$\int_I |f| < +\infty$$

vaut preuve d'intégrabilité ż.

4. *Dans ce cadre, les manipulations liées à la linéarité et aux majorations restent valides dans $\mathbb{R}$ quelle que soit la nature des intégrales, ce qui découle de la proposition suivante.*

Proposition 1.47 (Validité des manipulations usuelles dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions c.p.m et positives, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.*

1. *Dans $\mathbb{R}_+$, l'égalité suivante est toujours valide :*

$$\int_I (f(t) + \lambda g(t))\, dt = \int_I f(t)\, dt + \lambda \int_I g(t)\, dt.$$

2. *Si $f \leq g$ sur I, alors dans $\mathbb{R}_+$,*

$$\int_I f(t)\, dt \leq \int_I g(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Dans le cas où tout converge, c'est déjà vu, et dans les autres cas, il suffit d'exprimer le fait que les divergences se font toujours vers $+\infty$ dans le cadre positif.

- Pour la linéarité, il s'agit aussi de constater que si les deux intégrales divergent, puisque $\lambda > 0$, il ne peut pas y avoir de compensation entre les deux termes, et

$$\int_I (f + \lambda g)$$

est nécessairement divergente aussi.

- Pour la comparaison, utiliser les théorèmes de comparaison pour l'étude des convergences.

□

Théorème 1.48 (Théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité)**.** *Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux, et $b = \sup I \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $f(x) = O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f en b.*
2. *Si $f(x) = o(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f en b.*
3. *Si $f(x) \sim g(x)$, l'intégrabilité de f en b équivaut à celle de g.*

Ce théorème s'adapte bien entendu à la borne inférieure $a = \inf(I)$.

Exemple 1.49. *Etudier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)\sin(x)}{x}$.*

Exercice 1.50. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de partie réelle strictement positive, P un polynôme réel non constant, et f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(t) = O(P(t)).$$

Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^\alpha} f(t)dt.$$

Définition 1.51 (Ensemble $L^1(I,\mathbb{K})$)**.** *On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I. C'est donc une partie de $C^0_m(I,\mathbb{K})$.*

Proposition 1.52 (Espace $L^1(I,\mathbb{K})$)**.** *$L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_m(I,\mathbb{K})$.*

Proposition 1.53 (Inégalité triangulaire dans $L^1(I,\mathbb{K})$)**.** *Soit $f \in L^1(I,\mathbb{K})$. Alors*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

On note dans la suite de ce paragraphe $L^1_c(I,\mathbb{K})$ le sous-espace de $L^1(I,\mathbb{K})$ constitué des fonctions intégrables sur I et continues. La notation n'est pas standard et n'apparaît pas dans le programme officiel. Il faut la réintroduire si vous l'utilisez.

Le résultat suivant a déjà été vu lorsque $I = [a,b]$. Le cas général s'en déduit en recollant deux intervalles semi-ouverts.

Proposition 1.54 (Positivité, et stricte positivité)**.** *Soit $f \in L^1_c(I,\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$. Alors $\int_I f \geq 0$, le cas d'égalité étant obtenu si et seulement si $f = 0$.*

Corollaire 1.55 (E.v.n $(L^1_c(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$)**.** *On définit, pour tout $f \in L^1_c(I,\mathbb{K})$,*

$$\|f\|_1 = \int_I |f|.$$

Alors $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1_c(I,\mathbb{K})$.

1.6 Bilan méthodologique

Méthode 1.56 (Étudier la convergence d'une intégrale)**.** *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$*

- *Étudier la c.p.m. sur $I =]a,b[$, voir si éventuellement f est (ou peut se prolonger en) une fonction c.p.m. sur $[a,b]$ (dans ce cas, il n'y a rien à faire) ou sur $[a,b[$ (ce qui évite d'avoir à couper en 2)*
- *S'il y a un problème de c.p.m. au milieu de l'intervalle, voir si on peut se ramener à des fonctions c.p.m. en subdivisant davantage l'intervalle.*
- *Commencer par l'étude de la borne en laquelle la convergence vous paraît la plus douteuse. S'il y a divergence en cette borne, il ne sera pas nécessaire d'étudier l'autre borne.*
- *Commencer par étudier l'intégrabilité en cette borne, notamment par comparaisons, puis en l'autre.*
- *Si la fonction n'est pas intégrable en l'une des 2 bornes, étudier la semi-convergence (il peut être intéressant de se ramener à un intervalle $[c,b]$ ou $]a,c]$, pour isoler les 2 bornes à étudier). Il n'y a pas de méthode standard, mais on pourra penser à l'une de ces possibilités :*
  - *faire un calcul explicite ;*