1. *Si $\int_a^b g$ est convergente, il en est de même de $\int_a^b f$.*
2. *Si $\int_a^b f$ est divergente, il en est de même de $\int_a^b g$.*

Remarque 1.24. *Il suffit d'avoir la comparaison $0 \leq f \leq g$ au voisinage à gauche de b seulement. Par ailleurs, les intervalles de définition de f et g n'ont pas besoin d'avoir la même borne inférieure.*

Corollaire 1.25 (Théorème de comparaison par domination ou négligeabilité)**.**
1. *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$, positives, et telles que $f(x) = O(g(x))$. Alors la convergence de $\int_a^b g$ entraîne celle de $\int_a^b f$.*
2. *Cela reste vrai si on remplace l'hypothèse de domination par $f(x) = o(g(x))$.*

Exemple 1.26 (Intégrale de Gauss)**.** *Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et de $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,dt$ (les deux moitiés de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$).*

Corollaire 1.27 (Théorème de comparaison par équivalences)**.** *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$, positives, et telles que $f(x) \sim_b g(x)$. Alors*

$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ ont même nature.}$$

Exemple 1.28. *Pour quelles valeurs de x l'intégrale*

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

est-elle convergente ?

1.4 Extension aux intégrales sur un intervalle ouvert quelconque I

Avant de voir comment se ramener à l'étude d'intégrales positives via l'étude de la convergence absolue, on étend les différents concepts et résultats vus jusqu'à présent au cas d'intégrales de fonctions définies sur un intervalle quelconque. Comme on l'a dit le cas des intervalles semi-ouverts $[a, b[$ est similaire à celui exposé ci-dessus, en remplaçant le passage à la limite à gauche en b par le passage à la limite à droite en a sur la borne inférieure de l'intégrale. Comme le cas des intervalles fermés bornés $[a, b]$ est du ressort du programme de MPSI (ce ne sont pas des intégrales généralisées, et il n'y a pas de passage à la limite nécessaire, même si ce ne serait pas fautif d'après la remarque 4.1.6), il reste à étudier le cas des intervalles ouverts $]a, b[$, avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.29 (Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$, une application c.p.m. sur $]a, b[$. On dit que*

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

est convergente si et seulement si il existe $c \in]a, b[$, tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ soit convergente (en la borne a) et

$$\int_c^b f(t)\,dt$$

soit convergente (en la borne b). Cette propriété est alors indépendante du choix de $c \in]a, b[$. On définit alors l'intégrale de f sur $]a, b[$, par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Cette définition est indépendante de c, et peut se réécrire

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+}\lim_{y\to b^-}\int_x^y f(t)\,dt.$$

Exemple 1.30 (Gauss, fonction Γ d'Euler)**.** 1. *Intégrale de Gauss :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

est convergente.

2. *Fonction Γ d'Euler :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Quel est le domaine de définition de Γ ?

Avertissement 1.31. *Dans l'expression sous forme de double limite, les deux bornes doivent bien être indépendantes. Si on lie les bornes, il peut y avoir des compensations qui faussent l'étude.*

Exemple 1.32. *L'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$$

est divergente, mais

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}\sin(t)\,dt = 0.$$

Les propriétés vues dans le cadre des intégrales généralisées en une seule borne s'étendent facilement.

Théorème 1.33 (Chasles)**.** *Soit I un intervalle quelconque, d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$, et c tel que $a < c < b$. Alors :*

1. $$\int_a^b f(t)\,dt$$

   est convergente si et seulement si

   $$\int_a^c f(t)\,dt$$

   et

   $$\int_c^b f(t)\,dt$$

   le sont.

2. *Dans ce cas,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Éléments de preuve**.** C'est juste un théorème bilan regroupant tous les cas qu'on a déjà vus.

- Si I est fermé borné, c'est la relation de Chasles usuelle pour les fonctions Riemann-intégrables sur un segment.
- Si I est semi-ouvert, c'est le théorème 4.1.10.
- Si I est ouvert, c'est la définition de la convergence 4.1.27.

□

Proposition 1.34 (Linéarité). *Soit I un intervalle quelconque de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g \in C_m^0(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont convergentes, alors } \int_a^b f + \lambda g \text{ aussi, et}$$
$$\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$
2. *Si*
$$\int_a^b f \text{ est convergente et } \int_a^b g \text{ est divergente, alors } \int_a^b (f+g) \text{ est divergente.}$$

Proposition 1.35 (Positivité et croissance). *Soit I un intervalle quelconque de bornes $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications c.p.m. sur I.*

1. *(Positivité) Si f est positive sur I, et*
$$\int_a^b f \text{ est convergente, alors } \int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$
2. *(Croissance) Si $f \leq g$ sur I, et si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont convergentes, alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$
3. *(Stricte positivité) Si f est continue et positive sur I, non partout nulle, et d'intégrale convergente, alors*
$$\int_a^b f > 0.$$

1.5 Intégrabilité

Comme pour les séries, l'étude de la convergence d'une intégrale peut parfois s'étudier en étudiant d'abord la convergence de l'intégrale de son module. Cela permet de ramener l'étude au cas d'une intégrale d'une fonction positive, et donc d'exploiter les méthodes du paragraphe précédent, notamment les techniques de comparaison.

Définition 1.36 (Intégrabilité).
1. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que f est intégrable ou que*
$$\int_a^b f(t)\,dt$$
est absolument convergente, si :

   (i) f est continue par morceaux sur $[a, b[$;

   (ii)
$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$
   est convergente.

2. *Soit f définie sur un intervalle I tel que $\sup I = b$, et $b \notin I$. On dit que f est intégrable en b s'il existe $c \in I$ tel que $f_{|[c,b[}$ soit intégrable.*