Nous verrons un peu plus tard d'autres intégrales de référence, appelées intégrales de Bertrand, de la forme

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$$

, qui peuvent être utiles pour affiner un peu les comparaisons (notamment quand α devient proche de 1, ou égal à 1). Mais ces intégrales ne sont pas explicitement au programme, et il faudra savoir redonner les justifications idoines au cas par cas.

Un autre exemple qu'on peut obtenir par un calcul explicite, mais qui sert assez rarement d'intégrale de référence du fait de son comportement peu marqué, est l'intégrale du logarithme en 0. Comme ce n'est pas une intégrale de référence officielle du programme, elle n'a que le statut d'exemple.

Exemple 1.19. *L'intégrale*

$$\int_0^1 \ln(t) dt$$

est convergente.

1.3 Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

Les séries de référence ont été étudiées de façon purement calculatoire en revenant à la définition : le calcul explicite de l'intégrale partielle a permis dans chacun des cas d'étudier l'existence d'une limite.

Assez rapidement, cette méthode devient insuffisante pour l'étude de la convergence des intégrales, soit parce que les calculs deviennent trop complexes, soit (cela arrive), parce qu'on n'est pas en mesure de calculer explicitement l'intégrale à étudier, en se servant des fonctions usuelles.

Les techniques de comparaisons nous permettront de contourner ce point de vue calculatoire, exactement comme lors de l'étude des séries.

On travaille toujours sur un intervalle $I = [a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 1.20 (Bonne définition dans $\mathbb{R}_+$)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ c.p.m. et positive. Alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet toujours une limite, finie ou infinie. Dans le cas où la limite est infinie, on s'autorisera la notation*

$$\int_a^b f(t)\, dt = +\infty.$$

Remarque 1.21.

1. *Dans le cas positif, on peut donc considérer $\int_a^b f(t)\, dt$ avant toute étude de convergence.*
2. *Le programme stipule expressément qu'ń un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence ż. Autrement dit, cela autorise à mener une méthode calculatoire sans se préoccuper de la convergence.*
3. *Cela permet aussi de justifier la convergence par majoration en obtenant après calculs une majoration stricte par $+\infty$.*

Lemme 1.22 (CNS de convergence d'une intégrale de fonction positive)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application c.p.m. sur $[a, b[$, et positive. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\int_a^b f$ *converge*

(ii) $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ *est bornée.*

Théorème 1.23 (Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives)**.** *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$ et telles que $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$. Alors :*

1. *Si $\int_a^b g$ est convergente, il en est de même de $\int_a^b f$.*
2. *Si $\int_a^b f$ est divergente, il en est de même de $\int_a^b g$.*

Remarque 1.24. *Il suffit d'avoir la comparaison $0 \leq f \leq g$ au voisinage à gauche de b seulement. Par ailleurs, les intervalles de définition de f et g n'ont pas besoin d'avoir la même borne inférieure.*

Corollaire 1.25 (Théorème de comparaison par domination ou négligeabilité)**.**
1. *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$, positives, et telles que $f(x) = O(g(x))$. Alors la convergence de $\int_a^b g$ entraîne celle de $\int_a^b f$.*
2. *Cela reste vrai si on remplace l'hypothèse de domination par $f(x) = o(g(x))$.*

Exemple 1.26 (Intégrale de Gauss)**.** *Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et de $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,dt$ (les deux moitiés de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$).*

Corollaire 1.27 (Théorème de comparaison par équivalences)**.** *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$, positives, et telles que $f(x) \sim_b g(x)$. Alors*

$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ ont même nature.}$$

Exemple 1.28. *Pour quelles valeurs de x l'intégrale*

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

est-elle convergente ?

1.4 Extension aux intégrales sur un intervalle ouvert quelconque I

Avant de voir comment se ramener à l'étude d'intégrales positives via l'étude de la convergence absolue, on étend les différents concepts et résultats vus jusqu'à présent au cas d'intégrales de fonctions définies sur un intervalle quelconque. Comme on l'a dit le cas des intervalles semi-ouverts $[a, b[$ est similaire à celui exposé ci-dessus, en remplaçant le passage à la limite à gauche en b par le passage à la limite à droite en a sur la borne inférieure de l'intégrale. Comme le cas des intervalles fermés bornés $[a, b]$ est du ressort du programme de MPSI (ce ne sont pas des intégrales généralisées, et il n'y a pas de passage à la limite nécessaire, même si ce ne serait pas fautif d'après la remarque 4.1.6), il reste à étudier le cas des intervalles ouverts $]a, b[$, avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.29 (Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$, une application c.p.m. sur $]a, b[$. On dit que*

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

est convergente si et seulement si il existe $c \in]a, b[$, tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ soit convergente (en la borne a) et

$$\int_c^b f(t)\,dt$$

soit convergente (en la borne b). Cette propriété est alors indépendante du choix de $c \in]a, b[$. On définit alors l'intégrale de f sur $]a, b[$, par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$