Remarque 1.10. *La propriété de stricte croissance s'utilise souvent dans sa version contraposée : si f est continue et positive sur I, d'intégrale (convergente) nulle, alors f est identiquement nulle.*

Proposition 1.11 (Chasles)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une application c.p.m. sur $[a, b[$, et $c \in [a, b[$. Alors :*

1. *L'intégrale*
$$\int_a^b f$$
est convergente si et seulement si
$$\int_c^b f$$
est convergente.

2. *Le cas échéant, on a alors*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Exercice 1.12. *Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$, et calculer sa valeur si elle converge.*

Proposition 1.13 (Intégrale dépendant de sa borne non impropre)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue telle que*
$$\int_a^x f$$
soit convergente. Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$$
est bien définie sur $[a, b[$. De plus, F est dérivable sur $[a, b[$, et
$$\forall x \in [a, b[, F'(x) = -f(x).$$

Remarque 1.14.
1. *Attention à l'hypothèse de continuité, la c.p.m ne suffit pas ici !*
2. *Par composition, on en déduit des formules de dérivation pour $x \mapsto \int_{a(x)}^b f(t)\,dt$, comme dans le cas d'intégrales définies.*
3. *Le signe disparaît lorsqu'on adapte à l'intervalle $[b, a]$: la dérivée de $F : x \mapsto \int_b^x f$ est dans ce cas $f(x)$.*

1.2 Intégrales de référence

Comme pour le cas des séries, on pourra souvent se ramener à l'étude de la convergence d'intégrales de fonctions positives. Il est donc intéressant de pouvoir disposer de techniques efficaces d'études de convergence dans ce contexte. Souvent ces techniques seront non calculatoires, dans le sens où elles ne passent pas par le calcul des intégrales partielles et de leurs limites. On privilégiera souvent des méthodes de comparaison, comme dans le cas de séries. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un certain nombre de séries de référence dont on connaît les propriétés de convergence, afin de pouvoir utiliser pour mener nos comparaisons.

Proposition 1.15 (Intégrales de référence en la borne $+\infty$)**.**
1. *Intégrale de Riemann : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *Intégrale exponentielle : pour $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge si et seulement si $a > 0$.*

On adapte ces exemples pour la borne :

Proposition 1.16 (Intégrales de référence en la borne +)**.**

1. *Intégrale de Riemann : pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*,*
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{|t|^\alpha}$$
converge si et seulement si $\alpha > 1$*.*
2. *Intégrale exponentielle : pour* $a \in \mathbb{R}$*,*
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-at} dt$$
converge si et seulement si $a < 0$*.*

Proposition 1.17 (Intégrale de Riemann en une borne finie b)**.**

1. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, l'intégrale de Riemann*
$$\int_a^b \frac{1}{|t-b|^\alpha} dt$$
converge si et seulement si $\alpha < 1$*.*
2. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, l'intégrale de Riemann*
$$\int_b^a \frac{1}{|t-b|^\alpha} dt$$
converge si et seulement si $\alpha < 1$*.*

Exemple 1.18.

- $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$
est convergente, alors que
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$
est divergente.
- $$\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$$
est divergente, alors que
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$
est convergente.
- $$\int_0^1 \frac{dt}{t}$$
et
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$
sont toutes deux divergentes.

Nous verrons un peu plus tard d'autres intégrales de référence, appelées intégrales de Bertrand, de la forme

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$$

, qui peuvent être utiles pour affiner un peu les comparaisons (notamment quand α devient proche de 1, ou égal à 1). Mais ces intégrales ne sont pas explicitement au programme, et il faudra savoir redonner les justifications idoines au cas par cas.

Un autre exemple qu'on peut obtenir par un calcul explicite, mais qui sert assez rarement d'intégrale de référence du fait de son comportement peu marqué, est l'intégrale du logarithme en 0. Comme ce n'est pas une intégrale de référence officielle du programme, elle n'a que le statut d'exemple.

Exemple 1.19. *L'intégrale*

$$\int_0^1 \ln(t) dt$$

est convergente.

1.3 Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

Les séries de référence ont été étudiées de façon purement calculatoire en revenant à la définition : le calcul explicite de l'intégrale partielle a permis dans chacun des cas d'étudier l'existence d'une limite.

Assez rapidement, cette méthode devient insuffisante pour l'étude de la convergence des intégrales, soit parce que les calculs deviennent trop complexes, soit (cela arrive), parce qu'on n'est pas en mesure de calculer explicitement l'intégrale à étudier, en se servant des fonctions usuelles.

Les techniques de comparaisons nous permettront de contourner ce point de vue calculatoire, exactement comme lors de l'étude des séries.

On travaille toujours sur un intervalle $I = [a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 1.20 (Bonne définition dans $\mathbb{R}_+$)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ c.p.m. et positive. Alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet toujours une limite, finie ou infinie. Dans le cas où la limite est infinie, on s'autorisera la notation*

$$\int_a^b f(t)\, dt = +\infty.$$

Remarque 1.21.

1. *Dans le cas positif, on peut donc considérer $\int_a^b f(t)\, dt$ avant toute étude de convergence.*
2. *Le programme stipule expressément qu'ń un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence ż. Autrement dit, cela autorise à mener une méthode calculatoire sans se préoccuper de la convergence.*
3. *Cela permet aussi de justifier la convergence par majoration en obtenant après calculs une majoration stricte par $+\infty$.*

Lemme 1.22 (CNS de convergence d'une intégrale de fonction positive)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application c.p.m. sur $[a, b[$, et positive. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\int_a^b f$ *converge*

(ii) $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ *est bornée.*

Théorème 1.23 (Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives)**.** *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$ et telles que $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$. Alors :*