Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser la définition des intégrales au cas d'intervalles non bornés, ou d'intervalles aux bornes desquels la fonction f n'est pas définie, et n'admet pas de limite finie. Le procédé est le même que celui qui permet de passer des sommes finies aux séries, à savoir passer à la limite sur les bornes. D'ailleurs, comme vous vous en rendrez compte, l'étude des intégrales généralisées possède des similarités très fortes avec l'étude des séries. Pour cela, afin de pouvoir définir l'intégrale de f sur un intervalle I quelconque, il est déjà nécessaire de pouvoir définir son intégrale sur tout segment $[a,b] \subset I$. Le programme de première année nous donne une condition suffisante simple à énoncer pour l'intégrabilité sur un segment : la continuité par morceaux de f. Même si ce n'est qu'une condition suffisante et pas nécessaire, c'est ce cadre que nous adoptons. Nous rappelons donc la définition importante suivante :

Définition 0.1 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle I)**.** *1. Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision (finie)*

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = b$$

de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [0, n-1]$, $f_{|]\sigma_k, \sigma_{k+1}[}$ soit continue et prolongeable par continuité sur $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$.

2. Soit I un intervalle quelconque. On dit que f est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ tel que $[a,b] \subset I$.

On notera $C^0_m([a,b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues par morceaux. La notation n'étant pas complètement standard, la redéfinir si vous l'utilisez.

Exemple 0.2. *1. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*

2. $x \mapsto \begin{cases} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Sa restriction à $]0, +\infty[$ est continue par morceaux.

1. Intégrales généralisées sur un intervalle $[a,b[$, $b \in \mathbb{R}$

Dans toute cette partie, on considère un intervalle $I = [a,b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tels que $a < b$. Tout ce qu'on fait s'adapte facilement, par symétrie, à un intervalle $]b,a[$. Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Par définition, une fonction continue par morceaux sur I est en particulier continue par morceaux sur tout segment $[c,d]$ inclus dans I, notamment sur des segments $[a,x]$. Elle est donc intégrable (au sens de Riemann) sur ces intervalles fermés bornés. Cela motive la définition suivante.

Définition 1.1 (Intégrale généralisée sur $[a,b[$)**.** • *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux (c.p.m) sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f$$

est convergente si la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

définie sur $[a,b[$, admet une limite finie lorsque x tend vers b.

- *Lorsque*
$$\int_a^b f$$
est convergente, sa valeur est notée d'une des façons suivantes, et définie par :
$$\int_I f = \int_I f(t)\,dt = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt.$$
- *Si*
$$\int_a^b f$$
n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

On parle aussi parfois d'intégrale impropre et de borne impropre pour désigner la borne b qui est exclue du domaine.

Exemple 1.2. *1.*
$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}$$
est divergente.

2.
$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt$$
est convergente.

3.
$$\int_0^1 \ln(t)\,dt$$
est convergente.

Exercice 1.3. *Est-ce que les fonctions suivantes admettent une intégrale généralisée ?*

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $[0,1]$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in [1,+\infty[$ *sur* $[1,+\infty[$.
3. $x \mapsto \tan x$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque 1.4. *La forte ressemblance avec les séries pourrait faire croire que si*
$$\int_a^\infty f$$
converge, alors $f(x) \to 0$. *Est-ce le cas ?*

Une situation où la convergence est simple à obtenir est la suivante :

Proposition 1.5 (Intégrale faussement généralisée)**.** *On suppose que* $b \neq +\infty$. *Soit* $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ *une application c.p.m telle que* f *admette un prolongement* $\bar{f}$ *c.p.m sur* $[a,b]$. *Alors*
$$\int_a^b f$$
est convergente, et
$$\int_a^b f = \int_a^b \bar{f}.$$
Une telle intégrale est parfois appelée intégrale faussement généralisée.

Exemple 1.6. *Justifier la convergence de*

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

.

Remarque 1.7. *En particulier, si f est c.p.m sur $[a,b]$, considérer l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

au sens de Riemann, ou au sens de l'intégrale généralisée de $f_{|[a,b]}$ revient au même. Cela donne une certaine cohérence à la notation, et permet de s'assurer que la relation

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$$

reste aussi vrai pour des fonctions déjà c.p.m. (donc Riemann-intégrables) sur $[a,b]$.

Dans la suite, on reprend $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Proposition 1.8 (Linéarité)**.** *Soit $f,g \in C_m^0([a,b[,\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.*

1. *Si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont convergentes, alors } \int_a^b f+\lambda g \text{ aussi, et}$$
$$\int_a^b f+\lambda g = \int_a^b f + \lambda\int_a^b g.$$
2. *Si*
$$\int_a^b f \text{ est convergente et } \int_a^b g \text{ est divergente, alors } \int_a^b (f+g) \text{ est divergente.}$$
3. *Si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont divergentes, on ne peut rien dire en toute généralité de } \int_a^b (f+g).$$

Proposition 1.9 (Positivité et croissance)**.** *Soit $f,g : [a,b[\to\mathbb{K}$ deux applications c.p.m. sur $[a,b[$.*

1. *(Positivité) Si f est positive sur $I=[a,b[$ et si $\int_a^b f$ est convergente, alors*
$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$
2. *(Croissance) Si $f\leq g$ sur I, et si*
$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont convergentes, alors}$$
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$
3. *(Stricte positivité) Si f est continue et positive sur $[a,b[$, non partout nulle, et d'intégrale convergente, alors*
$$\int_a^b f > 0.$$

Remarque 1.10. *La propriété de stricte croissance s'utilise souvent dans sa version contraposée : si f est continue et positive sur I, d'intégrale (convergente) nulle, alors f est identiquement nulle.*

Proposition 1.11 (Chasles)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une application c.p.m. sur $[a, b[$, et $c \in [a, b[$. Alors :*

1. *L'intégrale*
$$\int_a^b f$$
est convergente si et seulement si
$$\int_c^b f$$
est convergente.

2. *Le cas échéant, on a alors*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Exercice 1.12. *Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$, et calculer sa valeur si elle converge.*

Proposition 1.13 (Intégrale dépendant de sa borne non impropre)**.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue telle que*
$$\int_a^x f$$
soit convergente. Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$$
est bien définie sur $[a, b[$. De plus, F est dérivable sur $[a, b[$, et
$$\forall x \in [a, b[, F'(x) = -f(x).$$

Remarque 1.14.
1. *Attention à l'hypothèse de continuité, la c.p.m ne suffit pas ici !*
2. *Par composition, on en déduit des formules de dérivation pour $x \mapsto \int_{a(x)}^b f(t)\,dt$, comme dans le cas d'intégrales définies.*
3. *Le signe disparaît lorsqu'on adapte à l'intervalle $[b, a]$: la dérivée de $F : x \mapsto \int_b^x f$ est dans ce cas $f(x)$.*

1.2 Intégrales de référence

Comme pour le cas des séries, on pourra souvent se ramener à l'étude de la convergence d'intégrales de fonctions positives. Il est donc intéressant de pouvoir disposer de techniques efficaces d'études de convergence dans ce contexte. Souvent ces techniques seront non calculatoires, dans le sens où elles ne passent pas par le calcul des intégrales partielles et de leurs limites. On privilégiera souvent des méthodes de comparaison, comme dans le cas de séries. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un certain nombre de séries de référence dont on connaît les propriétés de convergence, afin de pouvoir utiliser pour mener nos comparaisons.

Proposition 1.15 (Intégrales de référence en la borne $+\infty$)**.**
1. *Intégrale de Riemann : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *Intégrale exponentielle : pour $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge si et seulement si $a > 0$.*