Proposition 6.4 (Linéarité de la somme). *Soit E un e.v.n. et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries d'éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ aussi, et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

Remarque 6.5. 1. *Que dire si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?*

2. *Si on considère une somme de p séries, à quelles conditions de convergence peut-on déduire à coup sûr la nature de la série de la somme ?*

Dans la plupart des cas, on essayera de se ramener au cadre réel positif, de la même manière que lorsqu'on étudie la convergence absolue dans le cadre des séries numériques, grâce au théorème qui suit. Attention à l'hypothèse de finitude indispensable dans ce théorème. Comme dans le cas réel, l'étude de la convergence de suites peut se ramener à l'étude de la convergence de séries télescopiques :

Théorème 6.6 (Lien suite-série). *Soit E un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série télescopique*
$$\sum(u_{n+1} - u_n).$$

6.2 Séries à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie

Dans le cadre de la dimension finie, on peut souvent se ramener au cas de séries réelles positives, comme ce qu'on fait en étudiant la convergence absolue de séries numériques.

Définition 6.7 (Convergence absolue, CVA). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument (ou normalement) si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

Attention à l'hypothèse de finitude de la dimension dans le théorème suivant.

Théorème 6.8 (CVA implique CV). *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.*
Éléments de preuve. *Travailler avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour se ramener à la convergence absolue coordonnée par coordonnée.*

Exemple 6.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge.*

Définition 6.10 (Exponentielle matricielle). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit*
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$
De même, si E est un e.v.n. de dimension finie, on définit, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

L'exponentielle matricielle est notamment l'outil adéquat pour la résolution des systèmes différentiels, généralisant ainsi la résolution connue en dimension 1. Nous étudierons plus en détail les propriétés de l'exponentielle matricielle dans un chapitre ultérieur.