Exemple 5.26 (DA de la série harmonique)**.** *Montrer qu'il existe une constante γ telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La constante γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni. À l'heure actuelle, malgré de nombreuses recherches à ce propos, on ne sait toujours pas si γ est rationnelle ou non.

Exemple 5.27.
1. *Trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$. On n'explicitera pas la constante.*
2. *Trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de $\sum_{k=1}^{n} k^2 e^{-\frac{k}{n}}$. À nouveau, on n'explicitera pas la constante.*

6. Séries dans un e.v.n.

Le but de ce paragraphe est d'adapter rapidement les définitions et propriétés générales vues sur les séries numériques dans le cadre de séries à valeurs dans un e.v.n.

6.1 Définitions et propriétés générales

Définition 6.1 (Convergence d'une série dans un e.v.n.)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge dans E si la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite $S \in E$ (au sens de la norme $\|\cdot\|$).*

Le vecteur S est alors appelé somme de la série $\sum u_n$, et on note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

On adapte évidemment au cas d'une série ne commençant pas au rang 0.

Exemple 6.2.
1. *Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u_n = (\delta_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} = \mathbb{I}_{\{n\}}(m)$. On munit E de la norme $\|(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{k}$.*

   Montrer que $\sum u_n$ converge, et en donner sa somme.
2. *On reprend le même exemple, mais on munit cette fois E de la norme $\|(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.*

   La série est-elle encore convergente ?

La technique mise en œuvre dans le deuxième exemple nous montre que certains principes d'étude des suites numériques s'adaptent, notamment :

Proposition 6.3 (Divergence grossière)**.**
1. *Soit $\sum u_n$ une série convergente dans un e.v.n. E. Alors $u_n \to 0_E$.*
2. *Par contraposée, une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente. On dit dans ce cas que la série est grossièrement divergente.*

Un certain nombre de propriétés connues dans le cadre numérique restent vraies. Par exemple :

Proposition 6.4 (Linéarité de la somme). *Soit E un e.v.n. et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries d'éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ aussi, et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

Remarque 6.5. 1. *Que dire si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?*

2. *Si on considère une somme de p séries, à quelles conditions de convergence peut-on déduire à coup sûr la nature de la série de la somme ?*

Dans la plupart des cas, on essayera de se ramener au cadre réel positif, de la même manière que lorsqu'on étudie la convergence absolue dans le cadre des séries numériques, grâce au théorème qui suit. Attention à l'hypothèse de finitude indispensable dans ce théorème. Comme dans le cas réel, l'étude de la convergence de suites peut se ramener à l'étude de la convergence de séries télescopiques :

Théorème 6.6 (Lien suite-série). *Soit E un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série télescopique*
$$\sum(u_{n+1} - u_n).$$

6.2 Séries à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie

Dans le cadre de la dimension finie, on peut souvent se ramener au cas de séries réelles positives, comme ce qu'on fait en étudiant la convergence absolue de séries numériques.

Définition 6.7 (Convergence absolue, CVA). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument (ou normalement) si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

Attention à l'hypothèse de finitude de la dimension dans le théorème suivant.

Théorème 6.8 (CVA implique CV). *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.*
Éléments de preuve. *Travailler avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour se ramener à la convergence absolue coordonnée par coordonnée.*

Exemple 6.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge.*

Définition 6.10 (Exponentielle matricielle). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit*
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$
De même, si E est un e.v.n. de dimension finie, on définit, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

L'exponentielle matricielle est notamment l'outil adéquat pour la résolution des systèmes différentiels, généralisant ainsi la résolution connue en dimension 1. Nous étudierons plus en détail les propriétés de l'exponentielle matricielle dans un chapitre ultérieur.