Exemple 5.17. *1. Rayon de convergence de la série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$

2. Rayon de convergence de la série géométrique dérivée $\sum (n+1)x^n$

3. Rayon de convergence de la série du logarithme $\sum \frac{x^n}{n^s}$.

5.4 Semi-convergence

Définition 5.18 (Semi-convergence)**.** *Une série semi-convergente est une série convergente, mais pas absolument convergente.*

Le seul outil au programme est :

Théorème 5.19 (Critère spécial de convergence des séries alternées)**.** *Soit* (a_n) *une suite décroissante de limite nulle. Alors* $\sum (-1)^n a_n$ *est appelée série alternée, et est convergente.*
Éléments de preuve. *En notant* S_n *la somme partielle, montrer que* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

Remarque 5.20. *L'étude des séries* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *ou* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ *est alors immédiate. On peut souvent s'y ramener par DL.*

Remarque 5.21. *Dans des situations d'agencements de signes plus complexes, une bonne idée consiste souvent à regrouper les termes consécutifs de même signe (faire des paquets), puis :*

- *vérifier que la somme sur chaque paquet ne tend pas vers 0, ce qui suffit à établir la divergence ;*
- *ou vérifier que la sommation par paquet se ramène à l'étude d'une série alternée. Il faut ensuite contrôler ce qui se passe entre les paquets, mais c'est assez « automatique » vu les propriétés de signes.*

5.5 Techniques asymptotiques

Pour commencer, on adapte au cas discret les théorèmes de sommation des relations de comparaison vus pour les intégrales.

Théorème 5.22 (Sommation des relations de comparaison)**.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques. On suppose que* $\sum v_n$ *est à termes réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). On note* $S_n(u)$ *(resp.* $S_n(v)$*) les sommes partielles de* $\sum u_n$ *(resp. de* $\sum v_n$*), et en cas de convergence, on note*

$$R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad (\text{resp. } R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$$

les restes de la série $\sum u_n$ *(resp.* $\sum v_n$*).*

1. *Si* $\sum v_n$ *converge,*
   - *si* $u_n = O(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = O(R_n(v))$*;*
   - *si* $u_n = o(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = o(R_n(v))$*;*

- *si* $u_n \sim v_n$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) \sim R_n(v)$*;*

2. *Si* $\sum v_n$ *diverge,*
   - *si* $u_n = O(v_n)$*, alors* $S_n(u) = O(S_n(v))$*;*
   - *si* $u_n = o(v_n)$*, alors* $S_n(u) = o(S_n(v))$*;*
   - *si* $u_n \sim v_n$*, alors* $S_n(u) \sim S_n(v)$*;*

Éléments de preuve. *La démonstration peut se faire exactement comme dans le cas des intégrales. On peut aussi se ramener au cas des comparaisons intégrales, en introduisant les fonctions* $f_u : x \mapsto u_{\lfloor x \rfloor}$ *et* $f_v : x \mapsto v_{\lfloor x \rfloor}$*.*

Corollaire 5.23 (Théorème de Cesàro)**.** *Soit* $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$ *si* $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*). Alors la suite des moyennes a la même limite :*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \ell.$$

Éléments de preuve.

- *Si* ℓ *fini, écrire* $u_n - \ell = o(1)$ *et sommer.*
- *Si* $\ell = +\infty$*,* $1 = o(u_n)$ *et sommer. Adapter pour* $-\infty$*.*

On retrouve, avec une technique un peu allégée, les équivalents trouvés précédemment pour les séries de Riemann. Le résultat lui-même est HP, mais il est attendu qu'on sache le retrouver rapidement.

Corollaire 5.24 (Équivalent des séries de Riemann revisité (HP))**.**

1. *Si* $\alpha < 1$*,* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$*;*
2. *Si* $\alpha > 1$*,* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$*;*
3. *Si* $\alpha = 1$*,* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$*.*

Éléments de preuve. *Procéder par télescopage, en trouvant un équivalent simple de* $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$*, ou de* $\ln(n+1) - \ln(n)$ *dans le dernier cas.*

Remarque 5.25 (DA de sommes partielles ou de restes)**.**

- *Trouver un équivalent simple du terme général, puis, suivant le cas, un équivalent du reste ou de la somme partielle par sommation.*
- *Retrancher l'équivalent à la somme partielle ou au reste. Cela définit une nouvelle suite* (u_n) *qu'on peut étudier via la série télescopique* $\sum(u_n - u_{n-1})$*.*
- *On peut itérer. Dans les situations « standard », à chaque étape, on est ramené à une somme de Riemann, via un développement limité.*
- *Attention à la bascule à faire des sommes partielles aux restes, quand on affine suffisamment le DA pour passer du cas divergent au cas convergent. Cela introduit en général une constante dans le DA, qu'on n'est pas en mesure de calculer.*

On peut appliquer cela (sauf la première étape déjà faite) aux séries de Riemann elles-mêmes. Par exemple :

Exemple 5.26 (DA de la série harmonique)**.** *Montrer qu'il existe une constante γ telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La constante γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni. À l'heure actuelle, malgré de nombreuses recherches à ce propos, on ne sait toujours pas si γ est rationnelle ou non.

Exemple 5.27.
1. *Trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$. On n'explicitera pas la constante.*
2. *Trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de $\sum_{k=1}^{n} k^2 e^{-\frac{k}{n}}$. À nouveau, on n'explicitera pas la constante.*

6. Séries dans un e.v.n.

Le but de ce paragraphe est d'adapter rapidement les définitions et propriétés générales vues sur les séries numériques dans le cadre de séries à valeurs dans un e.v.n.

6.1 Définitions et propriétés générales

Définition 6.1 (Convergence d'une série dans un e.v.n.)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge dans E si la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite $S \in E$ (au sens de la norme $\|\cdot\|$).*

Le vecteur S est alors appelé somme de la série $\sum u_n$, et on note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

On adapte évidemment au cas d'une série ne commençant pas au rang 0.

Exemple 6.2.
1. *Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u_n = (\delta_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} = \mathbb{I}_{\{n\}}(m)$. On munit E de la norme $\|(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{k}$.*

   Montrer que $\sum u_n$ converge, et en donner sa somme.
2. *On reprend le même exemple, mais on munit cette fois E de la norme $\|(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.*

   La série est-elle encore convergente ?

La technique mise en œuvre dans le deuxième exemple nous montre que certains principes d'étude des suites numériques s'adaptent, notamment :

Proposition 6.3 (Divergence grossière)**.**
1. *Soit $\sum u_n$ une série convergente dans un e.v.n. E. Alors $u_n \to 0_E$.*
2. *Par contraposée, une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente. On dit dans ce cas que la série est grossièrement divergente.*

Un certain nombre de propriétés connues dans le cadre numérique restent vraies. Par exemple :