Exemple 5.17. *1. Rayon de convergence de la série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$

2. Rayon de convergence de la série géométrique dérivée $\sum (n+1)x^n$

3. Rayon de convergence de la série du logarithme $\sum \frac{x^n}{n^s}$.

5.4 Semi-convergence

Définition 5.18 (Semi-convergence)**.** *Une série semi-convergente est une série convergente, mais pas absolument convergente.*

Le seul outil au programme est :

Théorème 5.19 (Critère spécial de convergence des séries alternées)**.** *Soit* (a_n) *une suite décroissante de limite nulle. Alors* $\sum (-1)^n a_n$ *est appelée série alternée, et est convergente.*
Éléments de preuve. *En notant* S_n *la somme partielle, montrer que* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

Remarque 5.20. *L'étude des séries* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *ou* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ *est alors immédiate. On peut souvent s'y ramener par DL.*

Remarque 5.21. *Dans des situations d'agencements de signes plus complexes, une bonne idée consiste souvent à regrouper les termes consécutifs de même signe (faire des paquets), puis :*

- *vérifier que la somme sur chaque paquet ne tend pas vers 0, ce qui suffit à établir la divergence ;*
- *ou vérifier que la sommation par paquet se ramène à l'étude d'une série alternée. Il faut ensuite contrôler ce qui se passe entre les paquets, mais c'est assez « automatique » vu les propriétés de signes.*

5.5 Techniques asymptotiques

Pour commencer, on adapte au cas discret les théorèmes de sommation des relations de comparaison vus pour les intégrales.

Théorème 5.22 (Sommation des relations de comparaison)**.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques. On suppose que* $\sum v_n$ *est à termes réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). On note* $S_n(u)$ *(resp.* $S_n(v)$*) les sommes partielles de* $\sum u_n$ *(resp. de* $\sum v_n$*), et en cas de convergence, on note*

$$R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad (\text{resp. } R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$$

les restes de la série $\sum u_n$ *(resp.* $\sum v_n$*).*

1. *Si* $\sum v_n$ *converge,*
   - *si* $u_n = O(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = O(R_n(v))$*;*
   - *si* $u_n = o(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = o(R_n(v))$*;*