Éléments de preuve. *Les points (ii) et (iii) sont équivalents par positivité de f.*

Pour l'équivalence entre (i) et (ii), encadrer sur un intervalle $[n, n+1]$ par décroissance de f :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n),$$

puis utiliser le TCSTP et le lemme.

On en déduit notamment :

Théorème 5.10 (Nature des séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Théorème 5.11 (Nature des séries de Bertrand)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La série de Bertrand $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ de paramètre (α, β) converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Éléments de preuve. *On avait montré le théorème similaire pour les intégrales. Il faut juste s'assurer de la monotonie à partir d'un certain rang.*

Le cas général $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ s'obtient par comparaison.

Les techniques de comparaison entre séries et intégrales permettent en général d'obtenir mieux que juste la convergence ou la divergence d'une série. En effet, il s'agit d'un encadrement en général suffisamment fin de la série par deux intégrales pour obtenir une estimation (majoration, ou équivalent) de sommes partielles ou de restes. Il n'y a pas de résultat particulier à connaître, simplement une bonne maîtrise de ces techniques de comparaison. Pour citer le programme officiel : « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes, ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone. »

Nous voyons donc un certain nombre d'exemples, à bien étudier pour être en mesure de les adapter à d'autres situations.

Exemple 5.12.

1. *Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \leq 1$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.*
2. *Déterminer un équivalent de*
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$$
.
3. *Déterminer un équivalent de*
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$$
.

5.3 Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue

On dispose d'un certain nombre d'outils de comparaison, permettant d'obtenir la convergence d'une série en la comparant à une série de référence. Les séries de référence sont :

- Les séries géométriques $\sum a^n$, qui convergent ssi $|a| < 1$;

- Les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, qui convergent ssi $\alpha > 1$;
- (HP) les séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, qui convergent ssi $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique.

Les comparaisons s'établissent en général dans le cadre des séries à termes positifs mais s'utilisent de fait souvent pour l'étude de la convergence absolue. Les énoncer dans ce contexte ne diminue pas la généralité, puisque pour une série à termes positifs, la convergence équivaut à la convergence absolue.

Théorème 5.13 (Théorème de comparaison des séries par $o, O, \sim$)**.** *Soit (u_n) et (v_n) des suites réelles ou complexes.*

1. *Si $u_n = O(v_n)$ (et a fortiori si $u_n = o(v_n)$), et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ CVA si et seulement si $\sum v_n$ CVA.*

Éléments de preuve. *Un O se traduit par une inégalité à partir d'un certain rang sur les valeurs absolues, ce qui nous ramène au TCSTP. Un équivalent se réécrit avec o.*

Remarque 5.14. *La comparaison par équivalents permet de comparer la nature de séries de signe constant, ou la CVA, mais ne permet pas d'établir une semi-convergence, par exemple.*

Une façon commode de comparer à une série géométrique consiste à comparer asymptotiquement le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au quotient similaire (constant égal à la raison) qu'on obtiendrait avec une série géométrique. Cela est à la base de la règle suivante :

Proposition 5.15 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ (ou au moins à partir d'un certain rang). On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \in \mathbb{R}_+$.*

(i) Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iii) Le cas $\ell = 1$ est indéterminé.

Éléments de preuve.

(i) si $\ell < a < 1$, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq a^{n-n_0}|u_{n_0}|$.

(ii) à partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| > |u_n|$, ce qui empêche la convergence vers 0 du terme général.

(iii) Considérer par exemple les séries de Riemann qui se placent toutes dans ce cas.

Remarque 5.16. *La règle de d'Alembert sera un outil important dans l'étude du domaine convergence des séries entières $\sum a_n x^n$. En effet si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, alors*

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to \ell|x|,$$

et la série va converger absolument si $|x| < \frac{1}{\ell}$ et diverger grossièrement si $|x| > \frac{1}{\ell}$ (dans $\mathbb{C}$). Ainsi, le domaine est un disque pouvant contenir (ou non) certains points de sa frontière. Le réel $\frac{1}{\ell}$ est appelé rayon de convergence de la série entière. On montrera que le domaine de convergence des séries entières est toujours de cette forme, même lorsque la règle de d'Alembert n'est pas applicable.

Exemple 5.17. *1. Rayon de convergence de la série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$

2. Rayon de convergence de la série géométrique dérivée $\sum (n+1)x^n$

3. Rayon de convergence de la série du logarithme $\sum \frac{x^n}{n^s}$.

5.4 Semi-convergence

Définition 5.18 (Semi-convergence)**.** *Une série semi-convergente est une série convergente, mais pas absolument convergente.*

Le seul outil au programme est :

Théorème 5.19 (Critère spécial de convergence des séries alternées)**.** *Soit* (a_n) *une suite décroissante de limite nulle. Alors* $\sum (-1)^n a_n$ *est appelée série alternée, et est convergente.*
Éléments de preuve. *En notant* S_n *la somme partielle, montrer que* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

Remarque 5.20. *L'étude des séries* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *ou* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ *est alors immédiate. On peut souvent s'y ramener par DL.*

Remarque 5.21. *Dans des situations d'agencements de signes plus complexes, une bonne idée consiste souvent à regrouper les termes consécutifs de même signe (faire des paquets), puis :*

- *vérifier que la somme sur chaque paquet ne tend pas vers 0, ce qui suffit à établir la divergence ;*
- *ou vérifier que la sommation par paquet se ramène à l'étude d'une série alternée. Il faut ensuite contrôler ce qui se passe entre les paquets, mais c'est assez « automatique » vu les propriétés de signes.*

5.5 Techniques asymptotiques

Pour commencer, on adapte au cas discret les théorèmes de sommation des relations de comparaison vus pour les intégrales.

Théorème 5.22 (Sommation des relations de comparaison)**.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques. On suppose que* $\sum v_n$ *est à termes réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). On note* $S_n(u)$ *(resp.* $S_n(v)$*) les sommes partielles de* $\sum u_n$ *(resp. de* $\sum v_n$*), et en cas de convergence, on note*

$$R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad (\text{resp. } R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$$

les restes de la série $\sum u_n$ *(resp.* $\sum v_n$*).*

1. *Si* $\sum v_n$ *converge,*
   - *si* $u_n = O(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = O(R_n(v))$*;*
   - *si* $u_n = o(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = o(R_n(v))$*;*