Théorème 5.4 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)**.** *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.*
Éléments de preuve. *Sous ces hypothèses, la somme partielle de la série $\sum u_n$ est croissante, et majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.*

Définition 5.5 (Convergence absolue)**.** *On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 5.6 (CVA implique CV)**.** *Toute série (réelle ou complexe) absolument convergence est convergente.*
Éléments de preuve.

- *Pour le cas réel, utiliser le TCSTP avec $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.*
- *Pour le cas complexe, utiliser le cas réel, et le TCSTP avec $0 \leq |\mathrm{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$.*

Proposition 5.7 (Linéarité)**.** *Soit λ et μ deux complexes.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum u_n + v_n$.*

Éléments de preuve. *Combinaison de la propriété de linéarité des sommes finies et de la propriété de linéarité de la limite.*

5.2 Comparaisons séries-intégrales

Lemme 5.8 (Caractérisation discrète de la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $f \geq 0$)**.** *Soit f une application positive, continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, et $n_0 \geq a$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la série de terme général $\left(\int_n^{n+1} f(t)dt\right)_{n \geq n_0}$ converge.*
Éléments de preuve. *C'est bien sûr Chasles, d'abord. Puis la croissance de $x \mapsto \int_{n_0}^x f(t)dt$, qui assure l'existence d'une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$.*

Théorème 5.9 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante continue par morceaux et positive.*
Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\sum_{n \geq a} f(n)$ *converge ;*

(ii) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge ;*

(iii) f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$.

Éléments de preuve. *Les points (ii) et (iii) sont équivalents par positivité de f.*

Pour l'équivalence entre (i) et (ii), encadrer sur un intervalle $[n, n+1]$ par décroissance de f :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n),$$

puis utiliser le TCSTP et le lemme.

On en déduit notamment :

Théorème 5.10 (Nature des séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Théorème 5.11 (Nature des séries de Bertrand)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La série de Bertrand $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ de paramètre (α, β) converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Éléments de preuve. *On avait montré le théorème similaire pour les intégrales. Il faut juste s'assurer de la monotonie à partir d'un certain rang.*

Le cas général $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ s'obtient par comparaison.

Les techniques de comparaison entre séries et intégrales permettent en général d'obtenir mieux que juste la convergence ou la divergence d'une série. En effet, il s'agit d'un encadrement en général suffisamment fin de la série par deux intégrales pour obtenir une estimation (majoration, ou équivalent) de sommes partielles ou de restes. Il n'y a pas de résultat particulier à connaître, simplement une bonne maîtrise de ces techniques de comparaison. Pour citer le programme officiel : « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes, ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone. »

Nous voyons donc un certain nombre d'exemples, à bien étudier pour être en mesure de les adapter à d'autres situations.

Exemple 5.12.

1. *Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \leq 1$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.*
2. *Déterminer un équivalent de*
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$$
.
3. *Déterminer un équivalent de*
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$$
.

5.3 Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue

On dispose d'un certain nombre d'outils de comparaison, permettant d'obtenir la convergence d'une série en la comparant à une série de référence. Les séries de référence sont :

- Les séries géométriques $\sum a^n$, qui convergent ssi $|a| < 1$;