1. *Alors il existe ε tel que s'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - a| < \varepsilon$, alors $u_n \to a$. On dit que a est un point fixe attractif.*
2. *Si tel est le cas, on a alors, pour tout $k \in]|f'(a)|, 1[$, $u_n = O(k^n)$.*

Lemme 4.13 (Théorème de la moyenne de Cesáro, cas convergent)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, et*

$$\forall n \geq 1, \quad M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

la suite de ses moyennes. Alors si (u_n) converge vers ℓ, (M_n) aussi.

5. Rappels et compléments sur les séries numériques

Toutes les séries de cette section sont à terme général dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle rapidement les définitions et propriétés principales.

5.1 Convergences

Définition 5.1 (Convergence d'une série)**.** *Soit (u_n) une suite de réels ou complexes.*

(i) Les sommes partielles S_n de la série de terme général u_n sont :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie.

(iii) On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Cette quantité est appelée somme *de la série de terme général u_n.*

(iv) Une série non convergente est dite divergente*.*

(v) Si $\sum u_n$ converge, on définit les restes de la série par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

Proposition 5.2 (Divergence grossière)**.** *Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On dit que la divergence est grossière.*
Éléments de preuve. *Si la série converge, $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0.*

Remarque 5.3 (Divergence non grossière)**.** *La réciproque est fausse. Autrement dit, il existe des divergences non grossières, comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.*

Théorème 5.4 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)**.** *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.*
Éléments de preuve. *Sous ces hypothèses, la somme partielle de la série $\sum u_n$ est croissante, et majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.*

Définition 5.5 (Convergence absolue)**.** *On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 5.6 (CVA implique CV)**.** *Toute série (réelle ou complexe) absolument convergence est convergente.*
Éléments de preuve.

- *Pour le cas réel, utiliser le TCSTP avec $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.*
- *Pour le cas complexe, utiliser le cas réel, et le TCSTP avec $0 \leq |\mathrm{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$.*

Proposition 5.7 (Linéarité)**.** *Soit λ et μ deux complexes.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum u_n + v_n$.*

Éléments de preuve. *Combinaison de la propriété de linéarité des sommes finies et de la propriété de linéarité de la limite.*

5.2 Comparaisons séries-intégrales

Lemme 5.8 (Caractérisation discrète de la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $f \geq 0$)**.** *Soit f une application positive, continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, et $n_0 \geq a$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la série de terme général $\left(\int_n^{n+1} f(t)dt\right)_{n \geq n_0}$ converge.*
Éléments de preuve. *C'est bien sûr Chasles, d'abord. Puis la croissance de $x \mapsto \int_{n_0}^x f(t)dt$, qui assure l'existence d'une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$.*

Théorème 5.9 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante continue par morceaux et positive.*
Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\sum_{n \geq a} f(n)$ *converge ;*

(ii) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge ;*

(iii) f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$.