Théorème 4.4 (Explicitation des SRL). *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence linéaire dont le polynôme caractéristique est χ. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de χ (dans $\mathbb{C}$), de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ respectivement. Alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)\lambda_i^n,$$

où pour tout $i \in [1, p]$, $P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i - 1}[X]$.

4.2 Suites récurrentes linéaires perturbées

Théorème 4.5 (Structure de l'ensemble des SRL perturbées). *L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant la relation de récurrence*

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,n} u_{n+i} = b_n$$

est un espace affine dirigé par l'espace $\mathcal{S}_H$ des suites vérifiant la relation homogène associée (EH). Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière, toute autre suite (v_n) vérifiant (E) vérifiera

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + w_n, \quad (w_n) \in \mathcal{S}_H.$$

Proposition 4.6 (Explicitation d'une SRL perturbée par $P(n)\lambda^n$). *Soit (EH) une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, de polynôme caractéristique χ, et (E) la relation correspondante, perturbée par $(b_n) = P(n)\lambda^n$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme*

$$u_n = n^\alpha Q(n)\lambda^n,$$

où $\alpha = mult_\chi(\lambda)$ et $\deg(Q) \leq \deg(P)$.

4.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 4.7 (Intervalle stable). *On dit qu'un intervalle I est stable par f si f est définie sur I (i.e. $I \subset D_f$) et $f(I) \subset I$.*

Théorème 4.8 (Condition suffisante pour que (u_n) soit bien définie). *Si I est un intervalle stable par f, et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

Proposition 4.9 (Étude des variations lorsque $f - \mathrm{id}$ est de signe constant). *Supposons $f - id$ de signe constant sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone, de sens de monotonie déterminé par le signe de $f - id$.*

Proposition 4.10 (Étude des variations lorsque f est croissante). *Supposons f croissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone. On trouve le sens de monotonie en comparant u_0 et u_1.*

Proposition 4.11 (Étude des variations lorsque f est décroissante). *Supposons f décroissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposé. On trouve les sens de monotonie en comparant u_0 et u_2.*

Proposition 4.12 (Vitesse de convergence en un point fixe attractif). *Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et soit $a \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(a)| < 1$.*

1. *Alors il existe ε tel que s'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - a| < \varepsilon$, alors $u_n \to a$. On dit que a est un point fixe attractif.*
2. *Si tel est le cas, on a alors, pour tout $k \in]|f'(a)|, 1[$, $u_n = O(k^n)$.*

Lemme 4.13 (Théorème de la moyenne de Cesáro, cas convergent)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, et*

$$\forall n \geq 1, \quad M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

la suite de ses moyennes. Alors si (u_n) converge vers ℓ, (M_n) aussi.

5. Rappels et compléments sur les séries numériques

Toutes les séries de cette section sont à terme général dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle rapidement les définitions et propriétés principales.

5.1 Convergences

Définition 5.1 (Convergence d'une série)**.** *Soit (u_n) une suite de réels ou complexes.*

(i) Les sommes partielles S_n de la série de terme général u_n sont :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie.

(iii) On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Cette quantité est appelée somme *de la série de terme général u_n.*

(iv) Une série non convergente est dite divergente*.*

(v) Si $\sum u_n$ converge, on définit les restes de la série par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

Proposition 5.2 (Divergence grossière)**.** *Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On dit que la divergence est grossière.*
Éléments de preuve. *Si la série converge, $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0.*

Remarque 5.3 (Divergence non grossière)**.** *La réciproque est fausse. Autrement dit, il existe des divergences non grossières, comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.*