Proposition 3.13 (Équivalents classiques). 1. $\ln(1+x) \sim x$;

2. $e^x - 1 \sim x$;
3. $(1+x)^a - 1 \sim ax \quad (a \neq 0)$;
4. $\sin(x) \sim x$;
5. $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$;
6. $\tan(x) \sim x$;
7. $sh(x) \sim x$;
8. $ch(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$;
9. $th(x) \sim x$;
10. $Arcsin(x) \sim x$;
11. $Arctan(x) \sim x$;

Théorème 3.14 (Formule de Stirling). *On a :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4. Suites récurrentes

4.1 Suites récurrentes linéaires

Définition 4.1 (Suites récurrentes linéaires). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On dit que* (u_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre* k *si* (u_n) *vérifie une relation du type :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

$$\text{où } ((a_{0,n}), \ldots, (a_{k-1,n})) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^k.$$

Théorème 4.2 (Structure et dimension de l'ensemble des SRL). *Soit, pour* $i \in [0, k-1]$, $(a_{i,n}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On pose* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

Alors $\mathcal{S}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, et l'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, \ldots, u_{k-1}) \end{cases}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{S}$ *est de dimension* k.

Définition 4.3 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite récurrente linéaire à coefficients constants, de relation*

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$$

Le polynôme caractéristique associé à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est le polynôme*

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1X - a_0.$$

Théorème 4.4 (Explicitation des SRL). *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence linéaire dont le polynôme caractéristique est χ. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de χ (dans $\mathbb{C}$), de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ respectivement. Alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)\lambda_i^n,$$

où pour tout $i \in [1, p]$, $P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i - 1}[X]$.

4.2 Suites récurrentes linéaires perturbées

Théorème 4.5 (Structure de l'ensemble des SRL perturbées). *L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant la relation de récurrence*

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,n} u_{n+i} = b_n$$

est un espace affine dirigé par l'espace $\mathcal{S}_H$ des suites vérifiant la relation homogène associée (EH). Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière, toute autre suite (v_n) vérifiant (E) vérifiera

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + w_n, \quad (w_n) \in \mathcal{S}_H.$$

Proposition 4.6 (Explicitation d'une SRL perturbée par $P(n)\lambda^n$). *Soit (EH) une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, de polynôme caractéristique χ, et (E) la relation correspondante, perturbée par $(b_n) = P(n)\lambda^n$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme*

$$u_n = n^\alpha Q(n)\lambda^n,$$

où $\alpha = mult_\chi(\lambda)$ et $\deg(Q) \leq \deg(P)$.

4.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 4.7 (Intervalle stable). *On dit qu'un intervalle I est stable par f si f est définie sur I (i.e. $I \subset D_f$) et $f(I) \subset I$.*

Théorème 4.8 (Condition suffisante pour que (u_n) soit bien définie). *Si I est un intervalle stable par f, et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

Proposition 4.9 (Étude des variations lorsque $f - \mathrm{id}$ est de signe constant). *Supposons $f - id$ de signe constant sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone, de sens de monotonie déterminé par le signe de $f - id$.*

Proposition 4.10 (Étude des variations lorsque f est croissante). *Supposons f croissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone. On trouve le sens de monotonie en comparant u_0 et u_1.*

Proposition 4.11 (Étude des variations lorsque f est décroissante). *Supposons f décroissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposé. On trouve les sens de monotonie en comparant u_0 et u_2.*

Proposition 4.12 (Vitesse de convergence en un point fixe attractif). *Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et soit $a \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(a)| < 1$.*