4. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et non minorée, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$.

De plus, dans le cas croissant, on a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Définition 2.18 (Suites adjacentes). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :*

1. *l'une est croissante et l'autre décroissante ;*
2. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers 0.*

Théorème 2.19 (Théorème des suites adjacentes). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles adjacentes. Alors :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent, et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$,
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq |v_n - u_n|$.

3. Comparaisons asymptotiques

Définition 3.1 (Domination). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|$
2. *il existe une suite* (μ_n) *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geq n_0$, $u_n = \mu_n v_n$, *et* (μ_n) *est bornée.*

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) *est dominée par* (v_n), *et on note* $u_n = O(v_n)$.

Définition 3.2 (Négligeabilité). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \epsilon|v_n|$;
2. *il existe une suite* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et un entier* n_0 *tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \epsilon_n v_n \quad \textit{et} \quad \lim \epsilon_n = 0.$$

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n), *et on note* $u_n = o(v_n)$.

Définition 3.3 (Équivalence). *Deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n) *sont dites équivalentes s'il existe une suite* (α_n) *et un entier* n_0 *tels que*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \alpha_n v_n \quad \textit{et} \quad \lim \alpha_n = 1.$$

On note $u_n \sim v_n$.

Proposition 3.4 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité).

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

Remarque 3.5. *Si* (v_n) *ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces propriétés peuvent être caractérisées par l'étude de* $\frac{u_n}{v_n}$ *:*

- $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *bornée* $\iff u_n = O(v_n)$*;*
- $\frac{u_n}{v_n} \to 0 \iff u_n = o(v_n)$*;*
- $\frac{u_n}{v_n} \to 1 \iff u_n \sim v_n$.

Proposition 3.6 (Transitivités strictes et larges de o et O)**.** 1. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n = O(w_n)$.

2. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$.
4. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$.

Proposition 3.7 (Sommes de o et O)**.** 1. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = o(w_n)$.

2. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.
4. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.

Proposition 3.8 (Produits de o et O)**.** 1. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$*, alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.

2. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$*, alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
3. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = O(x_n)$*, alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
4. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = O(x_n)$*, alors* $u_n v_n = O(w_n x_n)$.
5. *En particulier,* $u_n = w_n o(x_n) \iff u_n = o(w_n x_n)$ *et* $u_n = w_n O(x_n) \iff u_n = O(w_n x_n)$.

Proposition 3.9 (Équivalents de produits, quotients, puissances)**.** *Soit* $(u_n), (v_n), (u'_n)$ *et* (v'_n) *quatre suites réelles.*

1. *Si* $u_n \sim u'_n$ *et* $v_n \sim v'_n$*, alors* $u_n v_n \sim u'_n v'_n$.
2. *Si de plus* v_n *est non nulle à partir d'un certain rang, alors* $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$.
3. *Si* $u_n \sim u'_n$ *et si* a *est un réel fixé, alors* $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$.

Remarque 3.10. • *Ne pas sommer des équivalents (problème de compensation de la partie principale)*

- *Ne pas composer des équivalents par une fonction.*

Théorème 3.11 (Conservation des limites par équivalence)**.** *Si* $u_n \sim v_n$*, et si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, et sa limite est* ℓ.

Proposition 3.12 (Conservation du signe)**.** *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites équivalentes. Alors il existe* n_0 *tels que pour tout* $n \geq n_0$*,* u_n *et* v_n *soient de même signe.*

Proposition 3.13 (Équivalents classiques). 1. $\ln(1+x) \sim x$;

2. $e^x - 1 \sim x$;
3. $(1+x)^a - 1 \sim ax \quad (a \neq 0)$;
4. $\sin(x) \sim x$;
5. $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$;
6. $\tan(x) \sim x$;
7. $sh(x) \sim x$;
8. $ch(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$;
9. $th(x) \sim x$;
10. $Arcsin(x) \sim x$;
11. $Arctan(x) \sim x$;

Théorème 3.14 (Formule de Stirling). *On a :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4. Suites récurrentes

4.1 Suites récurrentes linéaires

Définition 4.1 (Suites récurrentes linéaires). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On dit que* (u_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre* k *si* (u_n) *vérifie une relation du type :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

$$\text{où } ((a_{0,n}), \ldots, (a_{k-1,n})) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^k.$$

Théorème 4.2 (Structure et dimension de l'ensemble des SRL). *Soit, pour* $i \in [0, k-1]$, $(a_{i,n}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On pose* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

Alors $\mathcal{S}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, et l'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, \ldots, u_{k-1}) \end{cases}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{S}$ *est de dimension* k.

Définition 4.3 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite récurrente linéaire à coefficients constants, de relation*

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$$

Le polynôme caractéristique associé à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est le polynôme*

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1X - a_0.$$