Proposition 2.10 (Passage à la limite pour les puissances). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, (u_n) étant de plus strictement positive. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, et que $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, 0), (0, 0), (1, +\infty), (1, -\infty)\}$. Alors :*

$$u_n^{v_n} \to \ell^{\ell'}.$$

Remarque 2.11 (Formes indéterminées pour les puissances). *On notera les formes indéterminées relatives aux exponentiations :*

$$\infty^0, \quad 0^0 \quad \textit{et} \quad 1^\infty.$$

2.3 Comportement des limites vis-à-vis des inégalités

Théorème 2.12 (Conservation des inégalités larges). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.*

Remarque 2.13. *Les inégalités strictes ne se conservent pas !*

Théorème 2.14 (Théorème de convergence par encadrement). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

Théorème 2.15 (Théorème de divergence par minoration ou majoration). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.*

Remarque 2.16 (Comparaison à une suite géométrique).

- *Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.*
- *En cas d'existence, notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.*
  - *Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in [\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
  - *Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]1, \ell]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
  - *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.*

2.4 Propriétés des suites monotones

Théorème 2.17 (Théorème de la convergence monotone). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

4. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et non minorée, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$.

De plus, dans le cas croissant, on a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Définition 2.18 (Suites adjacentes). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :*

1. *l'une est croissante et l'autre décroissante ;*
2. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers 0.*

Théorème 2.19 (Théorème des suites adjacentes). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles adjacentes. Alors :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent, et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$,
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq |v_n - u_n|$.

3. Comparaisons asymptotiques

Définition 3.1 (Domination). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|$
2. *il existe une suite* (μ_n) *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geq n_0$, $u_n = \mu_n v_n$, *et* (μ_n) *est bornée.*

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) *est dominée par* (v_n), *et on note* $u_n = O(v_n)$.

Définition 3.2 (Négligeabilité). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \epsilon|v_n|$;
2. *il existe une suite* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et un entier* n_0 *tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \epsilon_n v_n \quad \textit{et} \quad \lim \epsilon_n = 0.$$

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n), *et on note* $u_n = o(v_n)$.

Définition 3.3 (Équivalence). *Deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n) *sont dites équivalentes s'il existe une suite* (α_n) *et un entier* n_0 *tels que*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \alpha_n v_n \quad \textit{et} \quad \lim \alpha_n = 1.$$

On note $u_n \sim v_n$.

Proposition 3.4 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité).

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

Remarque 3.5. *Si* (v_n) *ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces propriétés peuvent être caractérisées par l'étude de* $\frac{u_n}{v_n}$ *:*