- (u_n) *admet la limite* $+\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A.$$

- (u_n) *admet la limite* $-\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant A.$$

Théorème 2.3 (Unicité de la limite)**.** *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Si elle existe, la limite de (u_n) est unique.*

Proposition 2.4 (Caractérisation topologique de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \in \overline{\mathbb{K}}$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$
2. $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \in V.$

Proposition 2.5 (Suites convergentes à valeurs entières)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).*

2.2 Rappel des propriétés opératoires relatives à la convergence

Théorème 2.6 (Opérations sur les limites finies)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes convergentes, et λ et μ deux scalaires (réels ou complexes). Alors :*

1. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim |u_n| = |\lim u_n|$*;*
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$*;*
3. $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$*;*
4. *si* $\lim v_n \neq 0$*, alors* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang ; ainsi,* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et* $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Théorème 2.7 (Opérations impliquant des limites infinies)**.** *Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$) :*

$$a + \infty = +\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = (sg(a))\infty \quad (\text{pour } a \neq 0);$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty; \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Remarque 2.8 (Formes indéterminées)**.** *En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées :*

$$\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Proposition 2.9 (Produit $0\times$borné)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Proposition 2.10 (Passage à la limite pour les puissances). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, (u_n) étant de plus strictement positive. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, et que $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, 0), (0, 0), (1, +\infty), (1, -\infty)\}$. Alors :*

$$u_n^{v_n} \to \ell^{\ell'}.$$

Remarque 2.11 (Formes indéterminées pour les puissances). *On notera les formes indéterminées relatives aux exponentiations :*

$$\infty^0, \quad 0^0 \quad \textit{et} \quad 1^\infty.$$

2.3 Comportement des limites vis-à-vis des inégalités

Théorème 2.12 (Conservation des inégalités larges). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.*

Remarque 2.13. *Les inégalités strictes ne se conservent pas !*

Théorème 2.14 (Théorème de convergence par encadrement). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

Théorème 2.15 (Théorème de divergence par minoration ou majoration). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.*

Remarque 2.16 (Comparaison à une suite géométrique).

- *Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.*
- *En cas d'existence, notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.*
  - *Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in [\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
  - *Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]1, \ell]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
  - *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.*

2.4 Propriétés des suites monotones

Théorème 2.17 (Théorème de la convergence monotone). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*