Définition 1.4 (Voisinage dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{K}$, et $V \subset \mathbb{K}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall y \in \mathbb{K},\ |y - a| < \varepsilon \implies y \in V,$$

c'est-à-dire $B(a, \varepsilon) \subset V$, où $B(a, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{K} \,|\, |y - a| < \varepsilon\}$ (boule ouverte de centre a et de rayon ε).

On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 1.5 (Voisinage de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit $V \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$.*

- *On dit que V est un voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $]b, +\infty] \subset V$.*
- *On dit que V est un voisinage de $a = -\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $[-\infty, b[\subset V$.*

On note $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathcal{V}(-\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

Proposition 1.6 (Caractérisation des voisinages de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. Alors $V \in \mathcal{V}(a)$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$a \in I \subset V.$$

Proposition 1.7 (Union et intersection de voisinages)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \mathbb{C}$. Soit $I \neq \emptyset$, et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le cas). Alors :*

1. *$\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.*
2. *Si I est fini, $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.*

Exemple 1.8. *Donner un exemple de famille de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de 0.*

Définition 1.9 (Propriété au voisinage de a)**.** *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'un élément $x \in \mathbb{K}$ est vérifiée au voisinage de a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.*

2. Convergence

2.1 Convergence, réexpression topologique

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 2.1 (Limite d'une suite, convergence, divergence)**.**

- *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun ℓ de $\mathbb{K}$ comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (dans $\mathbb{K}$).*

Définition 2.2 (Limite infinie d'une suite réelle)**.** *Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle.*

- (u_n) *admet la limite* $+\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A.$$

- (u_n) *admet la limite* $-\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant A.$$

Théorème 2.3 (Unicité de la limite)**.** *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Si elle existe, la limite de (u_n) est unique.*

Proposition 2.4 (Caractérisation topologique de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \in \overline{\mathbb{K}}$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$
2. $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \in V.$

Proposition 2.5 (Suites convergentes à valeurs entières)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).*

2.2 Rappel des propriétés opératoires relatives à la convergence

Théorème 2.6 (Opérations sur les limites finies)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes convergentes, et λ et μ deux scalaires (réels ou complexes). Alors :*

1. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim |u_n| = |\lim u_n|$*;*
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$*;*
3. $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$*;*
4. *si* $\lim v_n \neq 0$*, alors* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang ; ainsi,* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et* $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Théorème 2.7 (Opérations impliquant des limites infinies)**.** *Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$) :*

$$a + \infty = +\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = (sg(a))\infty \quad (\text{pour } a \neq 0);$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty; \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Remarque 2.8 (Formes indéterminées)**.** *En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées :*

$$\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Proposition 2.9 (Produit $0\times$borné)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*