Rappels sur les suites numériques

1. Topologie réelle et complexe

1.1 Intervalles

Définition 1.1 (Intervalle de $\mathbb{R}$)**.** *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \leq x \leq b \implies x \in I.$$

On rappelle que la propriété de la borne supérieure permet de décrire tous les intervalles :

Théorème 1.2 (Inventaire des intervalles réels)**.** *Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :*

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\},\ a \leq b$;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\},\ a < b$;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\},\ a < b$;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\},\ a < b$;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$;
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$;
- $\emptyset$.

Remarque 1.3.

1. *Cette propriété est spécifique à $\mathbb{R}$. Par exemple, elle est fausse dans $\mathbb{Q}$ (avec $a,b \in \mathbb{Q}$).*
2. *La définition et le théorème s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque $+\infty$ et $-\infty$ sont des éléments particuliers de $\overline{\mathbb{R}}$, on a besoin de moins de cas pour décrire tous les intervalles : $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$, avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble vide est par exemple obtenu en considérant $]0,0[$, alors que $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ et $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$.*

1.2 Voisinages

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La notation $|z|$ désignera donc suivant le cas soit la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, soit le module dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.4 (Voisinage dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{K}$, et $V \subset \mathbb{K}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall y \in \mathbb{K},\ |y - a| < \varepsilon \implies y \in V,$$

c'est-à-dire $B(a, \varepsilon) \subset V$, où $B(a, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{K} \,|\, |y - a| < \varepsilon\}$ (boule ouverte de centre a et de rayon ε).

On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 1.5 (Voisinage de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit $V \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$.*

- *On dit que V est un voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $]b, +\infty] \subset V$.*
- *On dit que V est un voisinage de $a = -\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $[-\infty, b[\subset V$.*

On note $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathcal{V}(-\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

Proposition 1.6 (Caractérisation des voisinages de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. Alors $V \in \mathcal{V}(a)$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$a \in I \subset V.$$

Proposition 1.7 (Union et intersection de voisinages)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \mathbb{C}$. Soit $I \neq \emptyset$, et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le cas). Alors :*

1. *$\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.*
2. *Si I est fini, $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.*

Exemple 1.8. *Donner un exemple de famille de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de 0.*

Définition 1.9 (Propriété au voisinage de a)**.** *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'un élément $x \in \mathbb{K}$ est vérifiée au voisinage de a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.*

2. Convergence

2.1 Convergence, réexpression topologique

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 2.1 (Limite d'une suite, convergence, divergence)**.**

- *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun ℓ de $\mathbb{K}$ comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (dans $\mathbb{K}$).*

Définition 2.2 (Limite infinie d'une suite réelle)**.** *Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle.*