Rappels sur les suites numériques

1. Topologie réelle et complexe

1.1 Intervalles

Définition 1.1 (Intervalle de $\mathbb{R}$)**.** *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \leq x \leq b \implies x \in I.$$

On rappelle que la propriété de la borne supérieure permet de décrire tous les intervalles :

Théorème 1.2 (Inventaire des intervalles réels)**.** *Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :*

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\},\ a \leq b$;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\},\ a < b$;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\},\ a < b$;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\},\ a < b$;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$;
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$;
- $\emptyset$.

Remarque 1.3.

1. *Cette propriété est spécifique à $\mathbb{R}$. Par exemple, elle est fausse dans $\mathbb{Q}$ (avec $a,b \in \mathbb{Q}$).*
2. *La définition et le théorème s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque $+\infty$ et $-\infty$ sont des éléments particuliers de $\overline{\mathbb{R}}$, on a besoin de moins de cas pour décrire tous les intervalles : $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$, avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble vide est par exemple obtenu en considérant $]0,0[$, alors que $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ et $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$.*

1.2 Voisinages

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La notation $|z|$ désignera donc suivant le cas soit la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, soit le module dans $\mathbb{C}$.