6.4 Applications polynomiales

Définition 6.16 (Application polynomiales de n variables)**.** *Soit $A \subset \mathbb{K}^n$ et $f : A \to \mathbb{K}$. On dit que f est une application polynomiale si f est une combinaison linéaire d'applications*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n},$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$.

Exemple 6.17. *L'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = 3x^2yz^4 - xy + 2$ est une application polynomiale.*

Proposition 6.18 (5.6.18)**.** *Les applications polynomiales sont continues sur leur domaine de définition, et ceci indépendamment des normes choisies.*

Éléments de preuve. Travailler avec la norme ∞ pour obtenir la continuité des projections, puis les règles sur le produit permettent de conclure. □

Exemple 6.19. *Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f : (x, y) \mapsto \left(\ln(x^2 + xy + y^2 + 1), \frac{2\cos(xy)}{x^2 + y^4 + 1} \right)$$

Théorème 6.20 (Continuité de tr et det)**.** *tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ sont continues en tant qu'applications de n^2 variables réelles.*

Éléments de preuve. Avec ce point de vue, tr et det sont polynomiales. La continuité de tr provient également de sa linéarité (et de la dimension finie). □

Plus généralement, on peut définir des applications polynomiales sur un espace quelconque :

Définition 6.21 (Application polynomiale)**.** *Soit E et F deux espaces de dimension finie, et $f : E \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) Il existe une base B de E et une base C de F tels que les coordonnées $f_k(x)$ de $f(x)$ sur C soient polynomiales en les coordonnées de x sur B;

(ii) Pour toute base B de E et toute base C de F, les coordonnées $f_k(x)$ de $f(x)$ sur C sont polynomiales en les coordonnées de x sur B;

On dit dans ce cas que f est une application polynomiale.

En travaillant coordonnée par coordonnée (sur F) avec la norme $\|\cdot\|_{B,\infty}$ sur E, les raisonnements ci-dessus s'adaptent bien, et on obtient :

Proposition 6.22 (Continuité des applications polynomiales)**.** *Soit E et F des espaces de dimension finie, et $f : E \to F$ une application polynomiale. Alors f est continue.*