6.3 Conséquences sur la continuité des applications linéaires

Théorème 6.11 (Continuité des AL en dimension finie)**.** *Soit E, F deux e.v.n.. Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue, donc*

$$\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F).$$

Éléments de preuve. Munir E d'une norme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{B,\infty}$, et majorer $u(\overline{B}(0,1))$. □

La norme triple $\|\cdot\|$ peut donc être définie sur $\mathcal{L}(E,F)$ tout entier. Si F est lui-même de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ est isomorphe à un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Plus précisément, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, définie par

$$X \mapsto MX.$$

Ainsi, quelle que soit la norme $\|\cdot\|_n$ choisie sur $\mathbb{K}^n$ et la norme $\|\cdot\|_p$ choisie sur $\mathbb{K}^p$, l'application linéaire définie par M est continue, ce qui permet de définir la norme triple associée à M.

Définition 6.12 (Norme triple associée à une matrice)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La norme triple de M (coordonnée aux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_n$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$) est définie par*

$$\|M\| = \sup_{X\in\mathbb{K}^p\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p} = \sup_{X\in B(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p} = \sup_{X\in S(0,1)} \|MX\|_n .$$

Proposition 6.13 (Encore une norme matricielle)**.** *La norme triple est matricielle (i.e. sous-multiplicative) : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et si la norme utilisée sur $\mathbb{K}^p$ est la même pour définir $\|N\|$ et $\|M\|$, alors*

$$\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\| .$$

Éléments de preuve. On l'a déjà vu dans le contexte des AL continues. □

Plus généralement,

Théorème 6.14 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)**.** *Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des e.v.n.. Si les $E_k, k \in [1,p]$ sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire $u : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.*

Éléments de preuve. Récurrence sur p. □

Exemple 6.15.

1. *Soit E de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}$ est multilinéaire sur E, donc continue, quelle que soit la norme de E.*
2. *$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue par rapport à ses colonnes, pour n'importe quelle norme sur l'espace $\mathbb{K}^n$ des colonnes.*
3. *$(M,N) \mapsto MN$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est continue.*
4. *De même, la composition des AL entre espaces de dimension finie.*

6.4 Applications polynomiales

Définition 6.16 (Application polynomiales de n variables)**.** *Soit $A \subset \mathbb{K}^n$ et $f : A \to \mathbb{K}$. On dit que f est une application polynomiale si f est une combinaison linéaire d'applications*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n},$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$.

Exemple 6.17. *L'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = 3x^2yz^4 - xy + 2$ est une application polynomiale.*

Proposition 6.18 (5.6.18)**.** *Les applications polynomiales sont continues sur leur domaine de définition, et ceci indépendamment des normes choisies.*

Éléments de preuve. Travailler avec la norme ∞ pour obtenir la continuité des projections, puis les règles sur le produit permettent de conclure. □

Exemple 6.19. *Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f : (x, y) \mapsto \left(\ln(x^2 + xy + y^2 + 1), \frac{2\cos(xy)}{x^2 + y^4 + 1} \right)$$

Théorème 6.20 (Continuité de tr et det)**.** *tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ sont continues en tant qu'applications de n^2 variables réelles.*

Éléments de preuve. Avec ce point de vue, tr et det sont polynomiales. La continuité de tr provient également de sa linéarité (et de la dimension finie). □

Plus généralement, on peut définir des applications polynomiales sur un espace quelconque :

Définition 6.21 (Application polynomiale)**.** *Soit E et F deux espaces de dimension finie, et $f : E \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) Il existe une base B de E et une base C de F tels que les coordonnées $f_k(x)$ de $f(x)$ sur C soient polynomiales en les coordonnées de x sur B;

(ii) Pour toute base B de E et toute base C de F, les coordonnées $f_k(x)$ de $f(x)$ sur C sont polynomiales en les coordonnées de x sur B;

On dit dans ce cas que f est une application polynomiale.

En travaillant coordonnée par coordonnée (sur F) avec la norme $\|\cdot\|_{B,\infty}$ sur E, les raisonnements ci-dessus s'adaptent bien, et on obtient :

Proposition 6.22 (Continuité des applications polynomiales)**.** *Soit E et F des espaces de dimension finie, et $f : E \to F$ une application polynomiale. Alors f est continue.*