6.2 Conséquences topologiques

Comme on l'a vu, en dimension finie, la topologie définie par une norme ne dépend pas du choix de la norme. Cela implique en particulier que certaines propriétés vues dans le cadre d'une norme donnée restent valides pour toutes les normes. En particulier :

Théorème 6.5 (Bolzano-Weierstrass en dimension finie)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension finie. Alors toute suite bornée de vecteurs de E admet une valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. Cela avait été démontré pour $\|\cdot\|_{B,\infty}$, après choix d'une base. Par équivalence des normes, cela reste vrai pour toute norme. □

Corollaire 6.6 (Caractérisation des compacts en dimension finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $K \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) K est compact ;

(ii) K est fermé et borné.

Éléments de preuve. Un sens a déjà été vu. L'autre résulte de BW et du caractère fermé. □

Corollaire 6.7 (Compactité des boules en dimension finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. La boule fermée $B(a, r)$ est un compact.*

Corollaire 6.8 (Caractérisation de la convergence par les v.a. dans un e.v.n. de dim finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et (u_n) une suite bornée. Alors (u_n) converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. (u_n) est à valeurs dans une boule fermée, donc compacte. □

Théorème 6.9 (Propriété topologique des sous-espaces)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est fermé.*

Éléments de preuve. Utiliser une base de E complétée d'une base de F, et utiliser la caractérisation séquentielle des fermés, en travaillant sur cette base. □

Exemple 6.10. *Soit E l'espace des suites réelles telles que $\sum \frac{|u_n|}{n^2}$ converge. Pour $u = (u_n)$, on définit*

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n^2}.$$

Soit F le sous-espace de E des suites à support fini (donc nulles à partir d'un certain rang). Montrer que N est une norme sur E, et que F n'est pas fermé (on pourra construire une suite d'éléments de F convergeant vers la suite constante de valeur 1).

6.3 Conséquences sur la continuité des applications linéaires

Théorème 6.11 (Continuité des AL en dimension finie)**.** *Soit E, F deux e.v.n.. Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue, donc*

$$\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F).$$

Éléments de preuve. Munir E d'une norme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{B,\infty}$, et majorer $u(\overline{B}(0,1))$. □

La norme triple $\|\cdot\|$ peut donc être définie sur $\mathcal{L}(E,F)$ tout entier. Si F est lui-même de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ est isomorphe à un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Plus précisément, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, définie par

$$X \mapsto MX.$$

Ainsi, quelle que soit la norme $\|\cdot\|_n$ choisie sur $\mathbb{K}^n$ et la norme $\|\cdot\|_p$ choisie sur $\mathbb{K}^p$, l'application linéaire définie par M est continue, ce qui permet de définir la norme triple associée à M.

Définition 6.12 (Norme triple associée à une matrice)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La norme triple de M (coordonnée aux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_n$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$) est définie par*

$$\|M\| = \sup_{X\in\mathbb{K}^p\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p} = \sup_{X\in B(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p} = \sup_{X\in S(0,1)} \|MX\|_n .$$

Proposition 6.13 (Encore une norme matricielle)**.** *La norme triple est matricielle (i.e. sous-multiplicative) : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et si la norme utilisée sur $\mathbb{K}^p$ est la même pour définir $\|N\|$ et $\|M\|$, alors*

$$\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\| .$$

Éléments de preuve. On l'a déjà vu dans le contexte des AL continues. □

Plus généralement,

Théorème 6.14 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)**.** *Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des e.v.n.. Si les $E_k, k \in [1,p]$ sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire $u : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.*

Éléments de preuve. Récurrence sur p. □

Exemple 6.15.

1. *Soit E de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}$ est multilinéaire sur E, donc continue, quelle que soit la norme de E.*
2. *$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue par rapport à ses colonnes, pour n'importe quelle norme sur l'espace $\mathbb{K}^n$ des colonnes.*
3. *$(M,N) \mapsto MN$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est continue.*
4. *De même, la composition des AL entre espaces de dimension finie.*