(i) φ *est continue;*

(ii) φ *est continue en* $(0,\dots,0)$*;*

(iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $(x_1,\dots,x_n)$*,*

$$\|\varphi(x_1,\dots,x_n)\|_F \leq k \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}.$$

Éléments de preuve. Le démonstration n'est pas exigible.

- (ii) $\implies$ (iii) : Dans le sens direct, prendre $k = \frac{1}{\eta^n}$, où η est tel que

$$\|x_1,\dots,x_n\| \leq \eta \implies \|\varphi(x_1,\dots,x_n)\| \leq 1.$$

- (iii) $\implies$ (i) Faire un télescopage (comme pour la continuité d'un produit), de sorte à former une différence $y_i - x_i$ sur l'une des coordonnées dans chaque terme.

□

Exemple 5.9. *1. L'application* $\mathbb{K} \times E \to E$*, telle que* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$*.*

2. L'application d'évaluation $\mathcal{L}_c(E,F) \times E \to F$ *telle que* $(u,x) \mapsto u(x)$*.*

3. L'application $\mathcal{L}_c(E,F) \times \mathcal{L}_c(F,G) \to \mathcal{L}_c(E,G)$ *telle que* $(u,v) \mapsto v \circ u$*.*

4. Si E *est un espace euclidien, et* $\|\cdot\|$ *la norme euclidienne associée,* $\langle \cdot,\cdot \rangle$ *est continue.*

5. Si E *est une algèbre tel que* $\|\cdot\|_E$ *est une norme d'algèbre, le produit* $(x,y) \mapsto xy$ *de* $E \times E$ *dans* E*.*

6. Retrouver avec l'exemple précédent la propriété de continuité d'un produit de deux fonctions à valeurs dans une algèbre muni d'une norme d'algèbre (donc même si cette propriété n'est pas au programme, on la retrouve facilement avec les résultats au programme).

6. E.v.n. de dimension finie, et conséquences sur la continuité

6.1 Équivalence des normes

Nous avons déjà évoqué ce théorème d'une importance capitale :

Théorème 6.1 (Équivalence des normes en dimension finie)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes définies sur* E *sont équivalentes*

Éléments de preuve. Fixer une base B et comparer une norme N quelconque à la norme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{B,\infty}$.

- Dans un sens, c'est évident par IT et majoration des coordonnées.

- Dans l'autre, utiliser la deuxième IT et la majoration précédente pour montrer que N est lipschitzienne donc continue. Terminer en utilisant la compacité de $B(0,1)$ pour $\|\cdot\|_{B,\infty}$.

□

Un espace de dimension finie pouvant toujours être muni d'une norme (par exemple la norme $\|\cdot\|_{B,\infty}$ associée à une base), on a une topologie naturelle d'e.v.n. unique, indépendante de la norme choisie. En particulier, toutes les propriétés de continuité et de convergence sont les mêmes quelle que soit la norme choisie. Le caractère borné est aussi préservé d'une norme à l'autre.

Il en résulte que le choix de la norme n'a pas beaucoup d'importance, et en général, elle ne sera pas précisée. Parler de convergence ou de continuité dans un espace de dimension finie E, sans préciser de norme, se réfère de façon implicite à la topologie définie par l'une quelconque des normes qui peuvent être définies sur E.

Ce théorème nous permet notamment de choisir une norme à notre convenance, dans le but de simplifier les calculs et les majorations, certaines normes pouvant être plus pratiques que d'autres suivant le contexte. Ainsi, comme on l'a déjà vu, il peut être intéressant, dans un contexte matriciel (donc en dimension finie), d'utiliser une norme matricielle (donc sous-multiplicative).

En particulier, la convergence peut toujours s'étudier avec la norme $\|\cdot\|_{B,\infty}$, ce qui permet de justifier le résultat suivant.

Corollaire 6.2 (Caractérisation de la convergence par les coordonnées en dim finie)**.** *Soit (E,N) un e.v.n. de dimension finie, et $B=(b_1,\dots,b_d)$ une base de E, (E',N') un e.v.n. quelconque, $A\subset E'$ et $a\in A$. Soit $(u_n)\in E^{\mathbb{N}}$ et $f\in E^A$ décomposées sur la base B :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\sum_{k=1}^{d}u_{n,k}b_k \quad \textit{et} \quad \forall x\in A,\quad f(x)=\sum_{k=1}^{d}f_k(x)b_k.$$

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L=(\ell_1,\dots,\ell_d)$ si et seulement si pour tout $k\in[\![1,d]\!]$, $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.*
2. *L'application f admet une limite $L=(\ell_1,\dots,\ell_d)$ lorsque x tend vers a si et seulement si pour tout $k\in[\![1,d]\!]$, $f_k(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell_k$.*
3. *L'application f est continue en $b\in A$ si et seulement si pour tout $k\in[\![1,d]\!]$, f_k est continue en b.*

Autrement dit, la convergence (de suites, de fonctions) et la continuité peuvent s'étudier coordonnée par coordonnée.

Exemple 6.3. *Trouver dans $\mathbb{R}[X]$ une suite non convergente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur les coefficients, mais convergeant coordonnée par coordonnée dans la base canonique.*

Avertissement 6.4. *On peut définir des métriques sur E associées à d'autres topologies ! Ainsi, l'unicité de la topologie sur E de dimension finie est valide dans le contexte où on ne regarde que les topologies issues de normes.*

6.2 Conséquences topologiques

Comme on l'a vu, en dimension finie, la topologie définie par une norme ne dépend pas du choix de la norme. Cela implique en particulier que certaines propriétés vues dans le cadre d'une norme donnée restent valides pour toutes les normes. En particulier :

Théorème 6.5 (Bolzano-Weierstrass en dimension finie)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension finie. Alors toute suite bornée de vecteurs de E admet une valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. Cela avait été démontré pour $\|\cdot\|_{B,\infty}$, après choix d'une base. Par équivalence des normes, cela reste vrai pour toute norme. □

Corollaire 6.6 (Caractérisation des compacts en dimension finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $K \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) K est compact ;

(ii) K est fermé et borné.

Éléments de preuve. Un sens a déjà été vu. L'autre résulte de BW et du caractère fermé. □

Corollaire 6.7 (Compactité des boules en dimension finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. La boule fermée $B(a, r)$ est un compact.*

Corollaire 6.8 (Caractérisation de la convergence par les v.a. dans un e.v.n. de dim finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et (u_n) une suite bornée. Alors (u_n) converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. (u_n) est à valeurs dans une boule fermée, donc compacte. □

Théorème 6.9 (Propriété topologique des sous-espaces)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est fermé.*

Éléments de preuve. Utiliser une base de E complétée d'une base de F, et utiliser la caractérisation séquentielle des fermés, en travaillant sur cette base. □

Exemple 6.10. *Soit E l'espace des suites réelles telles que $\sum \frac{|u_n|}{n^2}$ converge. Pour $u = (u_n)$, on définit*

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n^2}.$$

Soit F le sous-espace de E des suites à support fini (donc nulles à partir d'un certain rang). Montrer que N est une norme sur E, et que F n'est pas fermé (on pourra construire une suite d'éléments de F convergeant vers la suite constante de valeur 1).