5. Continuité des applications linéaires

On termine ce chapitre par l'étude de la continuité des applications linéaires entre deux e.v.n..

Théorème 5.1 (Caractérisation de la continuité d'une AL)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *u est continue sur E;*

(ii) *u est continue en 0;*

(iii) *il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$;*

(iv) *$u(B(0,1))$ est borné;*

(v) *$u(S(0,1))$ est borné.*

Définition 5.2 (Norme subordonnée)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue. On définit*

$$\|u\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On dit que $\|u\|$ est la norme subordonnée (aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$) de l'application linéaire continue u.

On parle aussi de norme triple, ou de norme d'opérateur, et on rencontre parfois la notation $\|\cdot\|_{op}$.

Exemple 5.3. *1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.. Déterminer $\|Id_E\|$.*

2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum_k p_k X^k\right\|_\infty = \max_k |p_k|$, et $a \in]-1, 1[$. Montrer que la forme linéaire $u : P \mapsto P(a)$ est continue et que $\|u\| = \dfrac{1}{1-|a|}$ (on pourra considérer $P_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k X^k$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$ du signe de a^k). Montrer que u n'est pas continue lorsque $|a| \geq 1$.

Proposition 5.4 (L'e.v.n. $\mathcal{L}_c(E, F)$)**.** *Soit $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev, et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.*

Proposition 5.5 (Sous-multiplicativité de $\|\cdot\|$)**.** *Soit E, F et G trois e.v.n., et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$, et*

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

Corollaire 5.6. *La norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$.*

Exemple 5.7. *Donner un exemple montrant qu'on peut avoir $\|u \circ v\| < \|u\| \cdot \|v\|$.*

On généralise l'étude de la continuité des applications linéaires au cas des applications multilinéaires.

Théorème 5.8 (Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires)**.** *Soit $E_1, \ldots, E_n, F$ des e.v.n., de normes $\|\cdot\|_{E_1}, \ldots, \|\cdot\|_{E_n}, \|\cdot\|_F$. Soit $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) φ *est continue;*

(ii) φ *est continue en* $(0,\dots,0)$*;*

(iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $(x_1,\dots,x_n)$*,*

$$\|\varphi(x_1,\dots,x_n)\|_F \leq k \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}.$$

Éléments de preuve. Le démonstration n'est pas exigible.

- (ii) $\implies$ (iii) : Dans le sens direct, prendre $k = \frac{1}{\eta^n}$, où η est tel que

$$\|x_1,\dots,x_n\| \leq \eta \implies \|\varphi(x_1,\dots,x_n)\| \leq 1.$$

- (iii) $\implies$ (i) Faire un télescopage (comme pour la continuité d'un produit), de sorte à former une différence $y_i - x_i$ sur l'une des coordonnées dans chaque terme.

□

Exemple 5.9. *1. L'application* $\mathbb{K} \times E \to E$*, telle que* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$*.*

2. L'application d'évaluation $\mathcal{L}_c(E,F) \times E \to F$ *telle que* $(u,x) \mapsto u(x)$*.*

3. L'application $\mathcal{L}_c(E,F) \times \mathcal{L}_c(F,G) \to \mathcal{L}_c(E,G)$ *telle que* $(u,v) \mapsto v \circ u$*.*

4. Si E *est un espace euclidien, et* $\|\cdot\|$ *la norme euclidienne associée,* $\langle \cdot,\cdot \rangle$ *est continue.*

5. Si E *est une algèbre tel que* $\|\cdot\|_E$ *est une norme d'algèbre, le produit* $(x,y) \mapsto xy$ *de* $E \times E$ *dans* E*.*

6. Retrouver avec l'exemple précédent la propriété de continuité d'un produit de deux fonctions à valeurs dans une algèbre muni d'une norme d'algèbre (donc même si cette propriété n'est pas au programme, on la retrouve facilement avec les résultats au programme).

6. E.v.n. de dimension finie, et conséquences sur la continuité

6.1 Équivalence des normes

Nous avons déjà évoqué ce théorème d'une importance capitale :

Théorème 6.1 (Équivalence des normes en dimension finie)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes définies sur* E *sont équivalentes*

Éléments de preuve. Fixer une base B et comparer une norme N quelconque à la norme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{B,\infty}$.

- Dans un sens, c'est évident par IT et majoration des coordonnées.