(i) On dit que A est étoilée par rapport à $a \in A$ si pour tout $b \in A$, le segment $[a, b]$ est inclus dans A, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0,1], \quad f((1-t)a + tb) \in A.$$

(ii) On dit que A est étoilée s'il existe a tel que A soit étoilée par rapport à A.

Remarque 4.9. *Soient $x, y, z \in E$, γ un arc continu reliant x et y et δ un arc continu reliant y et z. La* ***reliure*** *$\gamma \bullet \delta$ est définie par :*

$$\gamma \bullet \delta : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow E \\ t \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

Par construction, $\gamma \bullet \delta$ est un arc continu reliant x à z.

Proposition 4.10. *Une partie convexe est étoilée.*

Proposition 4.11 (Étoilé implique connexe)**.** *Soit A une partie d'un e.v.n. E.*

- *Si A est étoilée, alors A est connexe par arcs.*
- *En particulier, toute partie convexe est connexe par arcs.*
- *En particulier, les boules (ouvertes ou fermées) sont connexes par arcs.*

Éléments de preuve. On peut joindre b à c en 2 temps, en faisant un petit détour. □

Exemple 4.12.
1. *On retrouve la connexité par arcs des boules.*
2. *Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est connexe par arcs.*

Proposition 4.13 (Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$)**.** *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.*

4.2 Image continue d'une partie connexe par arcs

Le théorème suivant est une généralisation du TVI.

Théorème 4.14 (Image continue d'un connexe par arcs)**.** *Soit $f : A \to F$ une fonction continue sur une partie connexe par arcs A de E. Alors $f(A)$ est aussi connexe par arcs.*

Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, les connexes par arcs étant les intervalles, on retrouve le fait que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, qui est l'un des énoncés possibles du TVI. On peut se servir de cette propriété pour montrer que certains ensembles ne sont pas connexes par arcs.

Exemple 4.15.
1. *En considérant det, montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.*
2. *De même pour $O_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 4.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est injective.*
2. *f est strictement monotone.*

5. Continuité des applications linéaires

On termine ce chapitre par l'étude de la continuité des applications linéaires entre deux e.v.n..

Théorème 5.1 (Caractérisation de la continuité d'une AL)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *u est continue sur E;*

(ii) *u est continue en 0;*

(iii) *il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$;*

(iv) *$u(B(0,1))$ est borné;*

(v) *$u(S(0,1))$ est borné.*

Définition 5.2 (Norme subordonnée)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue. On définit*

$$\|u\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On dit que $\|u\|$ est la norme subordonnée (aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$) de l'application linéaire continue u.

On parle aussi de norme triple, ou de norme d'opérateur, et on rencontre parfois la notation $\|\cdot\|_{op}$.

Exemple 5.3. *1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.. Déterminer $\|Id_E\|$.*

2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum_k p_k X^k\right\|_\infty = \max_k |p_k|$, et $a \in]-1, 1[$. Montrer que la forme linéaire $u : P \mapsto P(a)$ est continue et que $\|u\| = \dfrac{1}{1-|a|}$ (on pourra considérer $P_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k X^k$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$ du signe de a^k). Montrer que u n'est pas continue lorsque $|a| \geq 1$.

Proposition 5.4 (L'e.v.n. $\mathcal{L}_c(E, F)$)**.** *Soit $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev, et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.*

Proposition 5.5 (Sous-multiplicativité de $\|\cdot\|$)**.** *Soit E, F et G trois e.v.n., et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$, et*

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

Corollaire 5.6. *La norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$.*

Exemple 5.7. *Donner un exemple montrant qu'on peut avoir $\|u \circ v\| < \|u\| \cdot \|v\|$.*

On généralise l'étude de la continuité des applications linéaires au cas des applications multilinéaires.

Théorème 5.8 (Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires)**.** *Soit $E_1, \ldots, E_n, F$ des e.v.n., de normes $\|\cdot\|_{E_1}, \ldots, \|\cdot\|_{E_n}, \|\cdot\|_F$. Soit $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes:*