Théorème 3.10. *Une fonction continue sur un compact K est uniformément continue sur K.*

Éléments de preuve. De même que le cas réel, par contraposée, en niant le critère séquentiel. □

Exercice 3.11. *Soit $T \in \mathbb{R}^+$ et $E = C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que toute fonction de E est uniformément continue.*

Exercice 3.12. *Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0\}$. Montrer que toute fonction de E est uniformément continue.*

4. Connexité

On cherche dans cette partie à généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

4.1 Parties connexes par arcs

Définition 4.1 (5.4.1 – Arc, ou chemin continu)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $(a, b) \in E^2$. Un arc continu (ou chemin continu) de a à b est une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

Remarque 4.2. *Faites un dessin pour illustrer la notion !*

Soit A une partie de E. On peut définir une relation sur A par

$$a\mathcal{R}b \iff \text{il existe un arc continu reliant } a \text{ à } b.$$

Proposition 4.3 (5.4.3 – Composantes connexes de A)**.** *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de A pour cette relation sont appelées composantes connexes de A.*

Définition 4.4 (Partie connexe par arcs)**.** *Soit A une partie d'un e.v.n. E. On dit que A est connexe par arcs si A ne possède qu'une seule composante connexe, donc si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe un arc continu γ reliant a à b.*

Exemple 4.5.

1. *Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^*$*
2. *Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.*
3. *Montrer que le « plan fendu » $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est connexe par arcs*
4. *$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est-il connexe par arc ?*
5. *Étudier la connexité par arcs de $S(a, r)$ dans un e.v.n..*

Exercice 4.6. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ est connexe par arcs.*

Exercice 4.7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathbb{C}^n \setminus H$ est connexe par arcs.*

Définition 4.8 (Partie étoilée)**.** *Soit A une partie d'un e.v.n. E.*

(i) On dit que A est étoilée par rapport à $a \in A$ si pour tout $b \in A$, le segment $[a, b]$ est inclus dans A, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0,1], \quad f((1-t)a + tb) \in A.$$

(ii) On dit que A est étoilée s'il existe a tel que A soit étoilée par rapport à A.

Remarque 4.9. *Soient $x, y, z \in E$, γ un arc continu reliant x et y et δ un arc continu reliant y et z. La* ***reliure*** *$\gamma \bullet \delta$ est définie par :*

$$\gamma \bullet \delta : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow E \\ t \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

Par construction, $\gamma \bullet \delta$ est un arc continu reliant x à z.

Proposition 4.10. *Une partie convexe est étoilée.*

Proposition 4.11 (Étoilé implique connexe)**.** *Soit A une partie d'un e.v.n. E.*

- *Si A est étoilée, alors A est connexe par arcs.*
- *En particulier, toute partie convexe est connexe par arcs.*
- *En particulier, les boules (ouvertes ou fermées) sont connexes par arcs.*

Éléments de preuve. On peut joindre b à c en 2 temps, en faisant un petit détour. □

Exemple 4.12.
1. *On retrouve la connexité par arcs des boules.*
2. *Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est connexe par arcs.*

Proposition 4.13 (Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$)**.** *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.*

4.2 Image continue d'une partie connexe par arcs

Le théorème suivant est une généralisation du TVI.

Théorème 4.14 (Image continue d'un connexe par arcs)**.** *Soit $f : A \to F$ une fonction continue sur une partie connexe par arcs A de E. Alors $f(A)$ est aussi connexe par arcs.*

Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, les connexes par arcs étant les intervalles, on retrouve le fait que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, qui est l'un des énoncés possibles du TVI. On peut se servir de cette propriété pour montrer que certains ensembles ne sont pas connexes par arcs.

Exemple 4.15.
1. *En considérant det, montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.*
2. *De même pour $O_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 4.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est injective.*
2. *f est strictement monotone.*