2. *$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 3y+2$ et $x^2 > y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Redémontrer le fait que $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$ sont des fermés de E, et que $\hat{B}(a,r)$ est un ouvert.*

Comme on l'avait annoncé plus haut :

Théorème 3.3 (5.3.3 – $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)**.** *Tout est dit dans le titre (et ceci indépendamment de la norme, si on admet l'équivalence des normes en dimension finie).*

Éléments de preuve. Quelle fonction continue permet de caractériser l'inversibilité? □

Avertissement 3.4. *En général, l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une fonction continue n'est pas ouvert (resp. fermé)*

Exemple 3.5. *Trouvez (graphiquement) des exemples dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Pour les fermés, c'est cependant presque vrai, avec une petite condition en plus (la compacité).

3.2 Fonction continue sur compact

Théorème 3.6 (Théorème de compacité)**.** *L'image par une fonction continue $f : A \to F$ d'une partie compacte $K \subset A$ est une partie compacte de F*

Éléments de preuve. La continuité permet de préserver la convergence d'une suite extraite. □

Corollaire 3.7 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur une partie K compacte d'un e.v.n. E. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Éléments de preuve. Par le théorème de compacité, $f(K)$ est fermé et borné. Donc $\sup f(K) \in f(K)$. □

Remarque 3.8.
1. *On retrouve l'énoncé de première année dans le cadre de fonctions définies sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ en remarquant qu'un intervalle $[a,b]$ est compact.*
2. *L'importance de ce théorème se fait particulièrement sentir dans le cadre de la recherche d'extremas globaux : le théorème des bornes atteintes se réexprime en effet en disant qu'une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur un compact admet un minimum et un maximum sur K.*

Exemple 3.9. *Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ prenant au moins une valeur strictement positive Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} P(x,y)$$

admet un maximum global.

Une autre propriété des fonctions continues sur un compact généralise une propriété de première année.

Théorème 3.10. *Une fonction continue sur un compact K est uniformément continue sur K.*

Éléments de preuve. De même que le cas réel, par contraposée, en niant le critère séquentiel. □

Exercice 3.11. *Soit $T \in \mathbb{R}^+$ et $E = C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que toute fonction de E est uniformément continue.*

Exercice 3.12. *Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0\}$. Montrer que toute fonction de E est uniformément continue.*

4. Connexité

On cherche dans cette partie à généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

4.1 Parties connexes par arcs

Définition 4.1 (5.4.1 – Arc, ou chemin continu)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $(a, b) \in E^2$. Un arc continu (ou chemin continu) de a à b est une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

Remarque 4.2. *Faites un dessin pour illustrer la notion !*

Soit A une partie de E. On peut définir une relation sur A par

$$a\mathcal{R}b \iff \text{il existe un arc continu reliant } a \text{ à } b.$$

Proposition 4.3 (5.4.3 – Composantes connexes de A)**.** *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de A pour cette relation sont appelées composantes connexes de A.*

Définition 4.4 (Partie connexe par arcs)**.** *Soit A une partie d'un e.v.n. E. On dit que A est connexe par arcs si A ne possède qu'une seule composante connexe, donc si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe un arc continu γ reliant a à b.*

Exemple 4.5.

1. *Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^*$*
2. *Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.*
3. *Montrer que le « plan fendu » $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est connexe par arcs*
4. *$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est-il connexe par arc ?*
5. *Étudier la connexité par arcs de $S(a, r)$ dans un e.v.n..*

Exercice 4.6. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ est connexe par arcs.*

Exercice 4.7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathbb{C}^n \setminus H$ est connexe par arcs.*

Définition 4.8 (Partie étoilée)**.** *Soit A une partie d'un e.v.n. E.*