Un autre résultat, permettant de travailler « à isomorphisme près » (par exemple en assimilant $\|\cdot\|_\infty$ sur E à $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace $\mathbb{K}^n$ des coordonnées dans la base B) :

Théorème 2.26 (Continuité de l'isomorphisme de transfert)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Soit $\|\cdot\|_F$ une norme sur F, et $\|\cdot\|_E$ la norme sur E induite par φ. Alors φ et φ^{-1} sont 1-lipschitziennes donc continues (pour ces normes).*

Éléments de preuve. Ce sont même des isométries! □

2.5 Prolongements

Proposition 2.27 (Prolongement par continuité)**.** *Soit $f : A \to F$ définie sur une partie A d'un e.v.n., et continue sur A. Soit $a \in \overline{A} \backslash A$ tel que $f(x)$ admet une limite $b \in F$ lorsque x tend vers a. Alors il existe une unique fonction $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to F$, coïncidant avec f sur A et continue sur $A \cup \{a\}$. Elle est définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim_{y \to a} f(y) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

Les situations de densité permettent aussi d'obtenir des propriétés d'unicité de prolongements.

Proposition 2.28 (Coïncidence sur une partie dense)**.** *Soit $f, g : A \to F$ deux applications continues sur A, et B une partie de E dense dans A. Si f et g coïncident sur B, alors $f = g$.*

Corollaire 2.29. *Soit A une partie de E et $B \subset A$ une partie dense dans A. Soit $f : B \to F$ une application continue. Alors f admet au plus un prolongement g défini et continu sur A.*

Exemple 2.30. *Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

3. Continuité et topologie

3.1 Images réciproques d'ouverts et fermés

Comme souvent, les images réciproques donnent des propriétés plus simples que les images directes (surtout du fait d'une quantification en moins dans la définition, ce qui permet d'échapper aux problèmes d'interversion de quantificateurs).

Théorème 3.1 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé)**.** *Soit $f : A \to F$ une application continue sur A, partie d'un e.v.n. E.*

1. *Pour tout U ouvert de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.*
2. *Pour tout C fermé de F, $f^{-1}(C)$ est un fermé relatif de A.*

Ce théorème est notamment très utile pour montrer de façon efficace que certaines parties de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts ou des fermés.

Exemple 3.2. 1. *Le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x \geq 0$ est un fermé.*

2. *$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 3y+2$ et $x^2 > y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Redémontrer le fait que $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$ sont des fermés de E, et que $\hat{B}(a,r)$ est un ouvert.*

Comme on l'avait annoncé plus haut :

Théorème 3.3 (5.3.3 – $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)**.** *Tout est dit dans le titre (et ceci indépendamment de la norme, si on admet l'équivalence des normes en dimension finie).*

Éléments de preuve. Quelle fonction continue permet de caractériser l'inversibilité? □

Avertissement 3.4. *En général, l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une fonction continue n'est pas ouvert (resp. fermé)*

Exemple 3.5. *Trouvez (graphiquement) des exemples dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Pour les fermés, c'est cependant presque vrai, avec une petite condition en plus (la compacité).

3.2 Fonction continue sur compact

Théorème 3.6 (Théorème de compacité)**.** *L'image par une fonction continue $f : A \to F$ d'une partie compacte $K \subset A$ est une partie compacte de F*

Éléments de preuve. La continuité permet de préserver la convergence d'une suite extraite. □

Corollaire 3.7 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur une partie K compacte d'un e.v.n. E. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Éléments de preuve. Par le théorème de compacité, $f(K)$ est fermé et borné. Donc $\sup f(K) \in f(K)$. □

Remarque 3.8.
1. *On retrouve l'énoncé de première année dans le cadre de fonctions définies sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ en remarquant qu'un intervalle $[a,b]$ est compact.*
2. *L'importance de ce théorème se fait particulièrement sentir dans le cadre de la recherche d'extremas globaux : le théorème des bornes atteintes se réexprime en effet en disant qu'une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur un compact admet un minimum et un maximum sur K.*

Exemple 3.9. *Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ prenant au moins une valeur strictement positive Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} P(x,y)$$

admet un maximum global.

Une autre propriété des fonctions continues sur un compact généralise une propriété de première année.