- *On dit que f est k-lipschitzienne sur B si*

$$\forall (x,y) \in B^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_E \leq k \|x - y\|_F .$$

- *On dit dans ce cas que k est un facteur de Lipschitz pour la fonction f sur B.*
- *On dit que f est lipschitzienne sur B s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.*
- *On dit que f est contractante s'il existe $k \in [0,1]$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Proposition 2.20 (Lipschitz implique u.c.)**.** *Une application lipschitzienne sur B est uniformément continue sur B.*

2.4 Exemples importants de fonctions continues

Proposition 2.21 (Continuité de la norme)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. L'application $x \mapsto \|x\|_E$ de E dans $\mathbb{K}$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur E.*

Éléments de preuve. Par inégalité triangulaire. □

Proposition 2.22 (Continuité de la distance à une partie)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, et $A \subset E$ une partie non vide. L'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

Éléments de preuve. Majorer $d(x,z) - d(y,z)$ par IT, puis $d(x,A) - d(y,A)$, puis intervertir les rôles. □

Proposition 2.23 (Continuité de la projection)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n.. On munit $E \times F$ de la norme produit. Alors les projections $p_E : E \times F \to E$ et $p_F : E \times F \to F$ définies par*

$$p_E(x,y) = x \quad \text{et} \quad p_F(x,y) = y$$

sont uniformément continues sur $E \times F$.

Éléments de preuve. Probablement encore un coup de M. Rudolf Lipschitz. □

Voici un corollaire qui permet souvent de se ramener à la continuité de fonctions usuelles d'une variable.

Corollaire 2.24. *Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), (E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ trois e.v.n., et $f : E_1 \to F$ une application continue. Alors*

$$\tilde{f} = \begin{cases} E_1 \times E_2 & \to F \\ (x,y) & \to f(x) \end{cases}$$

est continue.

Éléments de preuve. Composer par la projection. □

Exemple 2.25. *Étudier la continuité pour $\|\cdot\|_\infty$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x,y) = (\sin(x)\cos(y), e^{x+y}).$$

Un autre résultat, permettant de travailler « à isomorphisme près » (par exemple en assimilant $\|\cdot\|_\infty$ sur E à $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace $\mathbb{K}^n$ des coordonnées dans la base B) :

Théorème 2.26 (Continuité de l'isomorphisme de transfert)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Soit $\|\cdot\|_F$ une norme sur F, et $\|\cdot\|_E$ la norme sur E induite par φ. Alors φ et φ^{-1} sont 1-lipschitziennes donc continues (pour ces normes).*

Éléments de preuve. Ce sont même des isométries! □

2.5 Prolongements

Proposition 2.27 (Prolongement par continuité)**.** *Soit $f : A \to F$ définie sur une partie A d'un e.v.n., et continue sur A. Soit $a \in \overline{A} \backslash A$ tel que $f(x)$ admet une limite $b \in F$ lorsque x tend vers a. Alors il existe une unique fonction $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to F$, coïncidant avec f sur A et continue sur $A \cup \{a\}$. Elle est définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim_{y \to a} f(y) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

Les situations de densité permettent aussi d'obtenir des propriétés d'unicité de prolongements.

Proposition 2.28 (Coïncidence sur une partie dense)**.** *Soit $f, g : A \to F$ deux applications continues sur A, et B une partie de E dense dans A. Si f et g coïncident sur B, alors $f = g$.*

Corollaire 2.29. *Soit A une partie de E et $B \subset A$ une partie dense dans A. Soit $f : B \to F$ une application continue. Alors f admet au plus un prolongement g défini et continu sur A.*

Exemple 2.30. *Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

3. Continuité et topologie

3.1 Images réciproques d'ouverts et fermés

Comme souvent, les images réciproques donnent des propriétés plus simples que les images directes (surtout du fait d'une quantification en moins dans la définition, ce qui permet d'échapper aux problèmes d'interversion de quantificateurs).

Théorème 3.1 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé)**.** *Soit $f : A \to F$ une application continue sur A, partie d'un e.v.n. E.*

1. *Pour tout U ouvert de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.*
2. *Pour tout C fermé de F, $f^{-1}(C)$ est un fermé relatif de A.*

Ce théorème est notamment très utile pour montrer de façon efficace que certaines parties de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts ou des fermés.

Exemple 3.2. 1. *Le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x \geq 0$ est un fermé.*