2.3 Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

La notion de continuité traduit le fait que localement, $f(x)$ approche $f(a)$ à ε près fixé arbitrairement à l'avance. L'aspect local de cette approximation se traduit par ε intervenant dans la définition : ε nous donne le domaine de validité de l'approximation. Plus ε est petit, plus il faut rester proche de x pour que l'approximation soit correcte. La taille de ce domaine de validité peut d'ailleurs dépendre de x. En général, il n'y a pas de raison de pouvoir trouver un réel η convenant pour toutes les valeurs de x du domaine de définition d'une fonction continue. Cela signifie que, une marge ε étant donnée, il peut exister des points pour lesquels il faudra rester très très proche (infiniment proche si on fait tendre x vers un des bords du domaine) de x pour que l'approximation à ε près reste vraie.

Exemple 2.15. *1.* $x \mapsto e^x$ *sur* $\mathbb{R}$

2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $[0,1]$.

Si pour tout ε, on peut trouver un η convenable pour toute valeur de x, on parlera de continuité uniforme. Remarquez qu'il ne s'agit de rien de moins que d'une intervention de quantificateurs par rapport à la définition de la continuité sur un domaine.

Définition 2.16 (Continuité uniforme)**.** *Soit $f : A \to F$ une fonction définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. On dit que f est uniformément continue sur B si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in B^2, \quad \|x-y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Le réel η est appelé module de continuité uniforme de f pour l'approximation ε

Proposition 2.17 (Continuité uniforme implique continuité)**.** *Soit $f : A \to F$ et $B \subset A$. Si f est uniformément continue sur B, elle est continue sur B.*

Éléments de preuve. Évident : c'est juste enlever une contrainte de dépendance. □

Proposition 2.18 (Critère séquentiel de la continuité uniforme)**.** *Soit $f : A \to F$ une fonction définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est uniformément continue sur B*

(ii) *Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de X telles que $x_n - y_n \to 0$, on a aussi $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Éléments de preuve. Le sens direct est une conséquence immédiate de la définition de la continuité uniforme et de la convergence de suites. Réciproquement, raisonner par la contraposée. □

Un exemple important de classe de fonctions uniformément continues est la classe des fonctions lipschitziennes.

Définition 2.19 (Applications lipschitziennes)**.** *Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.*

- *On dit que f est k-lipschitzienne sur B si*

$$\forall (x,y) \in B^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_E \leq k \|x - y\|_F .$$

- *On dit dans ce cas que k est un facteur de Lipschitz pour la fonction f sur B.*
- *On dit que f est lipschitzienne sur B s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.*
- *On dit que f est contractante s'il existe $k \in [0,1]$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Proposition 2.20 (Lipschitz implique u.c.)**.** *Une application lipschitzienne sur B est uniformément continue sur B.*

2.4 Exemples importants de fonctions continues

Proposition 2.21 (Continuité de la norme)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. L'application $x \mapsto \|x\|_E$ de E dans $\mathbb{K}$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur E.*

Éléments de preuve. Par inégalité triangulaire. □

Proposition 2.22 (Continuité de la distance à une partie)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, et $A \subset E$ une partie non vide. L'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

Éléments de preuve. Majorer $d(x,z) - d(y,z)$ par IT, puis $d(x,A) - d(y,A)$, puis intervertir les rôles. □

Proposition 2.23 (Continuité de la projection)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n.. On munit $E \times F$ de la norme produit. Alors les projections $p_E : E \times F \to E$ et $p_F : E \times F \to F$ définies par*

$$p_E(x,y) = x \quad \text{et} \quad p_F(x,y) = y$$

sont uniformément continues sur $E \times F$.

Éléments de preuve. Probablement encore un coup de M. Rudolf Lipschitz. □

Voici un corollaire qui permet souvent de se ramener à la continuité de fonctions usuelles d'une variable.

Corollaire 2.24. *Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), (E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ trois e.v.n., et $f : E_1 \to F$ une application continue. Alors*

$$\tilde{f} = \begin{cases} E_1 \times E_2 & \to F \\ (x,y) & \to f(x) \end{cases}$$

est continue.

Éléments de preuve. Composer par la projection. □

Exemple 2.25. *Étudier la continuité pour $\|\cdot\|_\infty$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x,y) = (\sin(x)\cos(y), e^{x+y}).$$