Proposition 2.10 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A d'un e.v.n. E, et $a \in A$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est continue en a;*

(ii) *pour tout $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(u_n \to a) \implies (f(u_n) \implies f(a))$.*

Éléments de preuve. Conséquence directe de la caractérisation séquentielle pour les limites, et de la valeur de la limite lorsque a est dans le domaine. □

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Les opérations sur les limites ont pour corollaire immédiat les opérations similaires sur les fonctions continues. On considère toujours $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et A une partie de E, et $a \in A$.

Proposition 2.11 (Continuité d'une combinaison linéaire)**.** *Soit $f, g : A \to F$, et $\lambda : A \to \mathbb{K}$. Si f, g et λ sont continues en a, alors $\lambda f + g$ aussi.*

Proposition 2.12 (Continuité d'un produit et d'un inverse)**.** *On suppose que F est une algèbre, et que $\|\cdot\|_F$ est une norme d'algèbre. Soit $f, g : A \to F$.*

1. *Si f et g sont continues en a, alors fg aussi.*
2. *Si $f(x)$ est inversible au voisinage de a, alors $x \mapsto f(x)^{-1}$ est continue en a.*

Attention, il s'agit de l'inverse point par point, et non de la fonction réciproque!

Proposition 2.13 (Continuité d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien)**.** *On suppose que $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ où $(F_k, \|\cdot\|_{F_k})$ sont des e.v.n., et que $\|\cdot\|_F$ est la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : A \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est continue en a;*

(ii) *pour tout $k \in [1, p]$, f_k est continue en a.*

Remarque 2.14.
1. *Cela reste valide en remplaçant la norme produit par $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ qui lui sont équivalentes.*
2. *En particulier, cela permet d'étudier la continuité d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ en étudiant chacun de ses coordonnées, si $\mathbb{R}^n$ est muni d'une des 3 normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$, ou plus généralement de n'importe quelle norme, en admettant provisoirement l'équivalence des normes en dimension finie.*

2.3 Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

La notion de continuité traduit le fait que localement, $f(x)$ approche $f(a)$ à ε près fixé arbitrairement à l'avance. L'aspect local de cette approximation se traduit par ε intervenant dans la définition : ε nous donne le domaine de validité de l'approximation. Plus ε est petit, plus il faut rester proche de x pour que l'approximation soit correcte. La taille de ce domaine de validité peut d'ailleurs dépendre de x. En général, il n'y a pas de raison de pouvoir trouver un réel η convenant pour toutes les valeurs de x du domaine de définition d'une fonction continue. Cela signifie que, une marge ε étant donnée, il peut exister des points pour lesquels il faudra rester très très proche (infiniment proche si on fait tendre x vers un des bords du domaine) de x pour que l'approximation à ε près reste vraie.

Exemple 2.15. *1.* $x \mapsto e^x$ *sur* $\mathbb{R}$

2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $[0,1]$.

Si pour tout ε, on peut trouver un η convenable pour toute valeur de x, on parlera de continuité uniforme. Remarquez qu'il ne s'agit de rien de moins que d'une intervention de quantificateurs par rapport à la définition de la continuité sur un domaine.

Définition 2.16 (Continuité uniforme)**.** *Soit $f : A \to F$ une fonction définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. On dit que f est uniformément continue sur B si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in B^2, \quad \|x-y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Le réel η est appelé module de continuité uniforme de f pour l'approximation ε

Proposition 2.17 (Continuité uniforme implique continuité)**.** *Soit $f : A \to F$ et $B \subset A$. Si f est uniformément continue sur B, elle est continue sur B.*

Éléments de preuve. Évident : c'est juste enlever une contrainte de dépendance. □

Proposition 2.18 (Critère séquentiel de la continuité uniforme)**.** *Soit $f : A \to F$ une fonction définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est uniformément continue sur B*

(ii) *Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de X telles que $x_n - y_n \to 0$, on a aussi $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Éléments de preuve. Le sens direct est une conséquence immédiate de la définition de la continuité uniforme et de la convergence de suites. Réciproquement, raisonner par la contraposée. □

Un exemple important de classe de fonctions uniformément continues est la classe des fonctions lipschitziennes.

Définition 2.19 (Applications lipschitziennes)**.** *Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.*