2. Continuité

2.1 Continuité en un point

Dans tout le paragraphe, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux e.v.n., et $A \subset E$ est une partie de E.

Définition 2.1 (Continuité). *Soit $f : A \to F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a.*

Remarque 2.2. *Le point a est dans le domaine de f. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est nécessairement $f(a)$.*

De façon équivalente :

Proposition 2.3 (Réexpression métrique et topologique). *Soit $f : A \to F$, et $a \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$;

(iii) *pour tout $W \in V(f(a))$, il existe un voisinage $V \in V(a)$ tel que $f(V) \subset W$.*

Éléments de preuve. Équivalences déjà vues dans le cadre des limites. Le seul ingrédient supplémentaire est l'égalité de la limite avec $f(a)$, ce qui, comme on l'a vu, est toujours le cas lorsque a est dans le domaine de f. □

Remarque 2.4. *Comme on l'a vu dans le cadre des limites, les inégalités $\|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$ peuvent être indifféremment larges ou strictes.*

Définition 2.5 (Continuité sur une partie). *Soit $f : A \to F$, et $B \subset A$. On dit que f est continue sur B si f est continue en tout point de B.*

Avertissement 2.6. *Cela n'équivaut pas à la continuité de $f_{|B}$. Pouvez-vous trouver un contre-exemple ?*

Proposition 2.7 (Restriction de l'ensemble source). *Si f et g coïncident sur un voisinage de a, f est continue en a si et seulement si g est continue en a.*

Éléments de preuve. On a déjà vu dans cette situation l'équivalence de l'existence des limites, et leur égalité. □

Corollaire 2.8. *Soit f et g définies sur $A \subset E$, et U un ouvert tel que $U \cap A \neq \varnothing$. Alors, si $f_{|U \cap A} = g_{|U \cap A}$ et si g est continue sur $U \cap A$, alors f aussi.*

Exemple 2.9. *Étude de la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on traduit dans le cadre de la continuité la caractérisation séquentielle de la limite.

Proposition 2.10 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A d'un e.v.n. E, et $a \in A$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est continue en a;*

(ii) *pour tout $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(u_n \to a) \implies (f(u_n) \implies f(a))$.*

Éléments de preuve. Conséquence directe de la caractérisation séquentielle pour les limites, et de la valeur de la limite lorsque a est dans le domaine. □

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Les opérations sur les limites ont pour corollaire immédiat les opérations similaires sur les fonctions continues. On considère toujours $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et A une partie de E, et $a \in A$.

Proposition 2.11 (Continuité d'une combinaison linéaire)**.** *Soit $f, g : A \to F$, et $\lambda : A \to \mathbb{K}$. Si f, g et λ sont continues en a, alors $\lambda f + g$ aussi.*

Proposition 2.12 (Continuité d'un produit et d'un inverse)**.** *On suppose que F est une algèbre, et que $\|\cdot\|_F$ est une norme d'algèbre. Soit $f, g : A \to F$.*

1. *Si f et g sont continues en a, alors fg aussi.*
2. *Si $f(x)$ est inversible au voisinage de a, alors $x \mapsto f(x)^{-1}$ est continue en a.*

Attention, il s'agit de l'inverse point par point, et non de la fonction réciproque!

Proposition 2.13 (Continuité d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien)**.** *On suppose que $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ où $(F_k, \|\cdot\|_{F_k})$ sont des e.v.n., et que $\|\cdot\|_F$ est la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : A \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est continue en a;*

(ii) *pour tout $k \in [1, p]$, f_k est continue en a.*

Remarque 2.14.
1. *Cela reste valide en remplaçant la norme produit par $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ qui lui sont équivalentes.*
2. *En particulier, cela permet d'étudier la continuité d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ en étudiant chacun de ses coordonnées, si $\mathbb{R}^n$ est muni d'une des 3 normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$, ou plus généralement de n'importe quelle norme, en admettant provisoirement l'équivalence des normes en dimension finie.*