1.6 Limites partielles

On considère souvent des limites partielles (sur une partie du domaine), notamment dans le cas où une fonction f est définie de façon différente sur diverses parties de son domaine de définition.

Définition 1.35 (Limite de f selon X)**.** *Soit E et F deux e.v.n. et $A, X \subset F$ deux parties de E. Soit $f : A \to F$. Soit $a \in \overline{A \cap X}$. La limite de f selon X est, si elle existe,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f|X.$$

L'hypothèse $a \in \overline{A \cap X}$ est nécessaire du fait que $A \cap X$ est le domaine de définition de la restriction $f|X$.

Exemple 1.36.
1. *Pour f une fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la limite à gauche de f en a est la limite selon $]-\infty, a[$.*
2. *De même, la limite à droite de f en a est la limite selon $]a, +\infty[$.*
3. *Si $X = \{x_0\}$, a est adhérent à $X \cap A$ si et seulement si $x_0 = a$, et $a \in A$. La limite selon $\{a\}$ est alors $f(a)$.*

Vous savez caractériser l'existence d'une limite en un point $a \in \mathbb{R}$ par l'existence et l'égalité des limites à gauche, à droite et de la valeur au point ; c'est-à-dire l'existence et l'égalité des limites selon $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ et $\{a\}$. Voici une généralisation de cette caractérisation :

Proposition 1.37 (Caractérisation de la limite par les limites partielles)**.** *Soit E, F deux e.v.n., $A \subset E$, et $a \in \bar{A}$. Soit $f : A \to F$ et $b \in F$. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de parties de E telle que :*

(i) Il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset \bigcup_{i \in I} X_i$;

(ii) Pour tout $i \in I$, $a \in \overline{A \cap X_i}$;

(iii) Pour tout $i \in I$, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cap X_i}} f(x) = b$.

Alors $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Exemple 1.38. *Étudier la limite en $(x_0, 0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.39. *Les propriétés sur les limites (et celles sur la continuité qui suivent) sont notamment valides dans le contexte de fonctions $f : A \to \mathbb{R}$, où A est une partie de $\mathbb{R}^n$ (fonction réelle de n variables réelles). Il faut à priori se donner une norme sur $\mathbb{R}^n$, mais comme on le verra dans un chapitre ultérieur, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et le choix de la norme importe peu. On peut ainsi choisir la norme qui convient le mieux à l'étude en cours. Vous pouvez admettre ce point, et utiliser dès à présent dans les exercices l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$.*

2. Continuité

2.1 Continuité en un point

Dans tout le paragraphe, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux e.v.n., et $A \subset E$ est une partie de E.

Définition 2.1 (Continuité). *Soit $f : A \to F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a.*

Remarque 2.2. *Le point a est dans le domaine de f. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est nécessairement $f(a)$.*

De façon équivalente :

Proposition 2.3 (Réexpression métrique et topologique). *Soit $f : A \to F$, et $a \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$;

(iii) *pour tout $W \in V(f(a))$, il existe un voisinage $V \in V(a)$ tel que $f(V) \subset W$.*

Éléments de preuve. Équivalences déjà vues dans le cadre des limites. Le seul ingrédient supplémentaire est l'égalité de la limite avec $f(a)$, ce qui, comme on l'a vu, est toujours le cas lorsque a est dans le domaine de f. □

Remarque 2.4. *Comme on l'a vu dans le cadre des limites, les inégalités $\|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$ peuvent être indifféremment larges ou strictes.*

Définition 2.5 (Continuité sur une partie). *Soit $f : A \to F$, et $B \subset A$. On dit que f est continue sur B si f est continue en tout point de B.*

Avertissement 2.6. *Cela n'équivaut pas à la continuité de $f_{|B}$. Pouvez-vous trouver un contre-exemple ?*

Proposition 2.7 (Restriction de l'ensemble source). *Si f et g coïncident sur un voisinage de a, f est continue en a si et seulement si g est continue en a.*

Éléments de preuve. On a déjà vu dans cette situation l'équivalence de l'existence des limites, et leur égalité. □

Corollaire 2.8. *Soit f et g définies sur $A \subset E$, et U un ouvert tel que $U \cap A \neq \varnothing$. Alors, si $f_{|U \cap A} = g_{|U \cap A}$ et si g est continue sur $U \cap A$, alors f aussi.*

Exemple 2.9. *Étude de la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on traduit dans le cadre de la continuité la caractérisation séquentielle de la limite.