1.5 Opérations sur les limites

La seule opération pertinente dans un e.v.n. quelconque est la combinaison linéaire.

Théorème 1.29 (Limite d'une CL)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soit $f, g : A \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g admettent une limite en a, alors $\lambda f + g$ aussi, et*

$$\lim_{x\to a}(\lambda f + g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Éléments de preuve. Critère séquentiel. □

Théorème 1.30 (Limite d'une composée)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois e.v.n., $A \subset E$ et $B \subset F$, et $f : A \to F$ et $g : B \to G$ tels que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$, tel que f admette une limite b en a et g admette une limite en b. Alors $g \circ f$ admet une limite en c, et*

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{y\to b} g(y) = \lim_{y\to \lim_{x\to a} f(x)} g(y).$$

Éléments de preuve. Par voisinages, ce qui permet d'englober aussi les cas évoqués tout à la fin. □

Remarque 1.31. *Le théorème de convergence des suites extraites est un cas particulier de ce résultat.*

Proposition 1.32 (Limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}), \dots (F_p, \|\cdot\|_{F_p})$ une famille finie d'e.v.n.. Soit $f : A \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application définie sur une partie de A. On note, pour $x \in A$,*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

Soit $a \in A$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ ou $a = \infty$). Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b = (b_1, \dots, b_p)$ *(pour la norme produit)*

(ii) $\forall k \in [1, p], f_k(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b_k$

En termes plus concis, l'existence d'une limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien équivaut à l'existence de limites de chacune de ses composantes.

Remarque 1.33. *La norme produit est la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur le produit cartésien. Comme on l'a vu, elle est équivalente aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, donc cette propriété reste vraie avec ces normes-là.*

Exemple 1.34. *Le cas des limites des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un cas particulier, la norme usuelle sur $\mathbb{C}$ correspondant à la norme $\|\cdot\|_2$ sur le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi, f admet une limite en a si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire admettent une limite en a.*

1.6 Limites partielles

On considère souvent des limites partielles (sur une partie du domaine), notamment dans le cas où une fonction f est définie de façon différente sur diverses parties de son domaine de définition.

Définition 1.35 (Limite de f selon X)**.** *Soit E et F deux e.v.n. et $A, X \subset F$ deux parties de E. Soit $f : A \to F$. Soit $a \in \overline{A \cap X}$. La limite de f selon X est, si elle existe,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f|X.$$

L'hypothèse $a \in \overline{A \cap X}$ est nécessaire du fait que $A \cap X$ est le domaine de définition de la restriction $f|X$.

Exemple 1.36.
1. *Pour f une fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la limite à gauche de f en a est la limite selon $]-\infty, a[$.*
2. *De même, la limite à droite de f en a est la limite selon $]a, +\infty[$.*
3. *Si $X = \{x_0\}$, a est adhérent à $X \cap A$ si et seulement si $x_0 = a$, et $a \in A$. La limite selon $\{a\}$ est alors $f(a)$.*

Vous savez caractériser l'existence d'une limite en un point $a \in \mathbb{R}$ par l'existence et l'égalité des limites à gauche, à droite et de la valeur au point ; c'est-à-dire l'existence et l'égalité des limites selon $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ et $\{a\}$. Voici une généralisation de cette caractérisation :

Proposition 1.37 (Caractérisation de la limite par les limites partielles)**.** *Soit E, F deux e.v.n., $A \subset E$, et $a \in \bar{A}$. Soit $f : A \to F$ et $b \in F$. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de parties de E telle que :*

(i) Il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset \bigcup_{i \in I} X_i$;

(ii) Pour tout $i \in I$, $a \in \overline{A \cap X_i}$;

(iii) Pour tout $i \in I$, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cap X_i}} f(x) = b$.

Alors $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Exemple 1.38. *Étudier la limite en $(x_0, 0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.39. *Les propriétés sur les limites (et celles sur la continuité qui suivent) sont notamment valides dans le contexte de fonctions $f : A \to \mathbb{R}$, où A est une partie de $\mathbb{R}^n$ (fonction réelle de n variables réelles). Il faut à priori se donner une norme sur $\mathbb{R}^n$, mais comme on le verra dans un chapitre ultérieur, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et le choix de la norme importe peu. On peut ainsi choisir la norme qui convient le mieux à l'étude en cours. Vous pouvez admettre ce point, et utiliser dès à présent dans les exercices l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$.*