## 1.3 Limite en l'infini

Lorsque $E = \mathbb{R}$, et $+\infty$ est adhérent à $A$ (donc $A$ non majoré), on peut définir, comme dans le cas de fonctions réelles, des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

**Définition 1.10** (Limites en $+\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$)**.** *Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n., et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non majorée de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq \lambda \implies \|f(x) - b\|_F < \epsilon;$$

*ou, de façon équivalente, si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ f([\lambda, +\infty]) \subset B(b, \epsilon).$$

**Exemple 1.11.** *Étudier la limite dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de la fonction $x \mapsto f_x$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, où $f_x$ est la fonction définie par*

$$f_x(t) = (1-t)t^x.$$

**Remarque 1.12.** *Le cas de la convergence de suites à valeurs dans un e.v.n. $(F, \|\cdot\|_F)$ est un cas particulier de cette définition, lorsque $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.*

*On peut adapter cette définition dans le cas où $(E, \|\cdot\|_E)$ est un e.v.n. quelconque, mais au lieu de faire tendre $x$ vers un infini dans une direction précise, on fait tendre $x$ vers un infini non directionnel, c'est-à-dire qu'on fait tendre $\|x\|$ vers $+\infty$.*

**Définition 1.13** (Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de $E$. Soit $f : A \to F$. On suppose que $A$ n'est pas borné. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in A,\ \|x\|_E \geq A \implies \|f(x) - b\|_F \leq \epsilon.$$

**Exemple 1.14.** *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Montrer que $f(z)$ tend vers $0$ lorsque $|z| \to +\infty$.*

**Remarque 1.15.** *Toutes les définitions données dans le cadre des fonctions réelles (notamment les limites infinies ou les limites en des points infinis) ont été données, dans le cadre du programme de première année, dans le cas où $f$ est définie sur un intervalle (ou une union finie d'intervalles) et où $a$ est un point de cet intervalle ou une extrémité. Cette contrainte avait pour but de se limiter à des points adhérents au domaine, mais sans le dire. Les définitions s'étendent sans peine au cas d'un point $a \in X$, éventuellement infini (on rappelle que $+\infty \in X$ si et seulement si $X$ n'est pas majoré).*

**Exemple 1.16.** *Soit $f$ définie sur $\mathbb{Q}$ par $f(x) = \frac{1}{q}$ où $x = \frac{p}{q}$ est la représentation irréductible de $x$ (le signe éventuel se reportant sur $p$). Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$.*

## 1.4 Limites : point de vue topologique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. On rappelle qu'on a étendu, dans le cas réel, la notion de voisinage au cas des infinis :

**Définition 1.17** (Voisinage de $+\infty$)**.** *Soit $E = \mathbb{R}$. - On convient d'appeler voisinage de $+\infty$ un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]\alpha, +\infty[ \subset V$. - On note $\mathcal{V}(+\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$. - On définit de même $\mathcal{V}(-\infty)$.*

**Définition 1.18** (Voisinage de $\infty$)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n.. - On convient d'appeler voisinage de $\infty$ un sous-ensemble $V \subset E$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $c_E B(0, a) \subset V$. - On note $\mathcal{V}(\infty)$ l'ensemble des voisinages de l'infini.*

**Remarque 1.19.** *Toute comme dans le cas de voisinages de points finis, l'intersection d'un nombre fini de voisinages de l'infini est encore un voisinage de l'infini.*

*La notion de voisinage permet de condenser tous les cas distincts pour la définition des limites en un seul. C'est surtout intéressant dans le cas réel où il faut distinguer les infinis au départ et à la source. Dans la caractérisation suivante, les cas $a$ et/ou $b = \pm\infty$ sont pertinents lorsque $A$ et/ou $B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée (resp. non minoré). Le cas $a = \infty$ est pertinent lorsque $A$ n'est pas borné.*

**Théorème 1.20** (Caractérisation topologique des limites)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $f : A \to F$. Soit $a \in \overline{A}$, ou $a \in \{\infty, \pm\infty\}$, et $b \in F$, ou $b = \pm\infty$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

*(i)* $f(x)$ *tend vers* $b$ *lorsque* $x$ *tend vers* $a$

*(ii)* $\forall W \in \mathcal{V}(b),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f(U) \subset V$.

Éléments de preuve. Remarquer que $\|x - a\|_E < \varepsilon$ équivaut à $x \in B(a, \varepsilon)$

Au départ, on passe alors du cas topologique au cas métrique en remarquant que tout voisinage de a contient une boule $B(a, \varepsilon)$, et du cas métrique au cas topologique en remarquant qu'une boule $B(a, \varepsilon)$ est un voisinage de a. Quelle différence à l'arrivée ? □

**Remarque 1.21.** *On peut aussi avoir des caractérisations mixtes, que j'énonce uniquement dans le cas fini, pour éviter d'avoir à donner trop de cas. Avec les notations de la définition, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $f(x)$ *tend vers b lorsque x tend vers 0 ;*

*(ii) (métrique/topologique)* $\forall W \in \mathcal{V}(b),\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \eta \implies f(x) \in W$ $(i.e. f(B(a, \eta) \subset W)$

*(iii) (topologique/métrique)* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V \cap A,\ \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$ $(i.e. f(V) \subset B(a, \eta))$.

**Théorème 1.22** (Unicité de la limite)**.** *La limite de $f$ en $a$, si elle existe, est unique. On la note* $\lim_{x \to a} f(x)$.

Éléments de preuve. Même principe que pour les limites de suites : si $b_1 \neq b_2$ (y compris infini si on est dans $\mathbb{R}$), on peut trouver $V_1 \in \mathcal{V}(b_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(b_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. □

**Proposition 1.23.** *Soit $f : A \to F$ admettant une limite en $a$. Alors* $\lim_{x \to a} f(x) \in \overline{f(A)}$.

*En notant par abus $x \to \infty$ pour désigner $\|x\| \to +\infty$, et $x_n \to \infty$ lorsque $\|x_n\|_E \to +\infty$, on peut généraliser la caractérisation séquentielle que vous connaissez dans le contexte réel.*

**Théorème 1.24** (Caractérisation séquentielle)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement $a = \infty$, ou $\pm\infty$), et $b \in F$ ou $b \in \mathbb{R}$ (si $F = \mathbb{R}$). Les propositions suivantes sont équivalentes:*

*(i)* $\lim_{x\to a} f(x) = b$

*(ii)* $\forall (x_n) \in A^N, (x_n \to a) \implies (f(x_n) \to b)$.

Éléments de preuve.
- Dans le sens direct, utiliser la caractérisation topologique pour ne pas avoir besoin de distinguer les cas.
- Dans le sens réciproque, raisonner par contraposée, et construire des voisinages collant de plus en plus à a, et dont l'image n'est pas incluse dans un certain voisinage bien choisi de b.

□

Nous dirons qu'une fonction $f$ admet une propriété $P$ au voisinage d'un point $a \in X$, s'il existe un voisinage $V$ de a dans $\mathbb{R}$ (au sens étendu ci-dessus pour a infini) tel que la propriété $P$ soit vérifiée par $f$ sur l'ensemble $V \cap X$.

La notion de limite permet alors de « contrôler » une fonction au voisinage d'un point. Ainsi, on obtient par exemple :

**Proposition 1.25.** *Soit $f$ une fonction admettant une limite finie en un point $a$ de $\overline{X}$. Alors, $f$ est bornée au voisinage de $a$.*

Éléments de preuve. La définition de la limite par $\varepsilon$ donne un encadrement local de $f$. Comment s'arranger pour ne pas avoir besoin de distinguer les cas de limites en un point fini ou en un point infini? □

**Définition 1.26** (Coïncidence de deux fonctions)**.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $X$ et $Y$ et $a$ tel que $a \in \overline{X}$ et $a \in Y$. On dit que $f$ et $g$ coincident au voisinage de $a$ si et seulement s'il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\mathbb{R}$ tel que $X \cap V = Y \cap V$ et que*

$$\forall x \in X \cap V, \quad f(x) = g(x).$$

**Proposition 1.27** (Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au vois. de $a$)**.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point $a$. Alors, si $f$ admet une limite (finie ou infinie) en $a$, alors $g$ aussi, et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Éléments de preuve. Par voisinage pour ne pas avoir de discussion, en remarquant que si $V_0$ est un voisinage de $a$ sur lequel $f$ et $g$ coïncide, alors pour tout voisinage $U$ de $a$, $U \cap V_0$ est un voisinage de $a$, sur lequel $f$ et $g$ coïncident. □

**Exemple 1.28.** *Trouver un exemple de fonctions réelles telles que $f$ et $g$ coïncident sur $[a, b]$, et que $f$ admette une limite en $a$ mais par $g$.*

## 1.5 Opérations sur les limites

La seule opération pertinente dans un e.v.n. quelconque est la combinaison linéaire.

**Théorème 1.29** (Limite d'une CL)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soit $f, g : A \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $f$ et $g$ admettent une limite en $a$, alors $\lambda f + g$ aussi, et*

$$\lim_{x\to a}(\lambda f + g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Éléments de preuve. Critère séquentiel. □

**Théorème 1.30** (Limite d'une composée)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois e.v.n., $A \subset E$ et $B \subset F$, et $f : A \to F$ et $g : B \to G$ tels que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$, tel que $f$ admette une limite $b$ en $a$ et $g$ admette une limite en $b$. Alors $g \circ f$ admet une limite en $c$, et*

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{y\to b} g(y) = \lim_{y\to \lim_{x\to a} f(x)} g(y).$$

Éléments de preuve. Par voisinages, ce qui permet d'englober aussi les cas évoqués tout à la fin. □

**Remarque 1.31.** *Le théorème de convergence des suites extraites est un cas particulier de ce résultat.*

**Proposition 1.32** (Limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}), \dots (F_p, \|\cdot\|_{F_p})$ une famille finie d'e.v.n.. Soit $f : A \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application définie sur une partie de $A$. On note, pour $x \in A$,*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

*Soit $a \in A$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ ou $a = \infty$). Les propositions suivantes sont équivalentes:*

*(i)* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b = (b_1, \dots, b_p)$ *(pour la norme produit)*

*(ii)* $\forall k \in [1, p], f_k(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b_k$

*En termes plus concis, l'existence d'une limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien équivaut à l'existence de limites de chacune de ses composantes.*

**Remarque 1.33.** *La norme produit est la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur le produit cartésien. Comme on l'a vu, elle est équivalente aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, donc cette propriété reste vraie avec ces normes-là.*

**Exemple 1.34.** *Le cas des limites des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un cas particulier, la norme usuelle sur $\mathbb{C}$ correspondant à la norme $\|\cdot\|_2$ sur le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi, $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire admettent une limite en $a$.*