1.3 Limite en l'infini

Lorsque $E = \mathbb{R}$, et $+\infty$ est adhérent à A (donc A non majoré), on peut définir, comme dans le cas de fonctions réelles, des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Définition 1.10 (Limites en $+\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$)**.** *Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n., et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non majorée de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq \lambda \implies \|f(x) - b\|_F < \epsilon;$$

ou, de façon équivalente, si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ f([\lambda, +\infty]) \subset B(b, \epsilon).$$

Exemple 1.11. *Étudier la limite dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de la fonction $x \mapsto f_x$ lorsque x tend vers $+\infty$, où f_x est la fonction définie par*

$$f_x(t) = (1-t)t^x.$$

Remarque 1.12. *Le cas de la convergence de suites à valeurs dans un e.v.n. $(F, \|\cdot\|_F)$ est un cas particulier de cette définition, lorsque $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.*

On peut adapter cette définition dans le cas où $(E, \|\cdot\|_E)$ est un e.v.n. quelconque, mais au lieu de faire tendre x vers un infini dans une direction précise, on fait tendre x vers un infini non directionnel, c'est-à-dire qu'on fait tendre $\|x\|$ vers $+\infty$.

Définition 1.13 (Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de E. Soit $f : A \to F$. On suppose que A n'est pas borné. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in A,\ \|x\|_E \geq A \implies \|f(x) - b\|_F \leq \epsilon.$$

Exemple 1.14. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Montrer que $f(z)$ tend vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$.*

Remarque 1.15. *Toutes les définitions données dans le cadre des fonctions réelles (notamment les limites infinies ou les limites en des points infinis) ont été données, dans le cadre du programme de première année, dans le cas où f est définie sur un intervalle (ou une union finie d'intervalles) et où a est un point de cet intervalle ou une extrémité. Cette contrainte avait pour but de se limiter à des points adhérents au domaine, mais sans le dire. Les définitions s'étendent sans peine au cas d'un point $a \in X$, éventuellement infini (on rappelle que $+\infty \in X$ si et seulement si X n'est pas majoré).*

Exemple 1.16. *Soit f définie sur $\mathbb{Q}$ par $f(x) = \frac{1}{q}$ où $x = \frac{p}{q}$ est la représentation irréductible de x (le signe éventuel se reportant sur p). Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$.*

1.4 Limites : point de vue topologique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. On rappelle qu'on a étendu, dans le cas réel, la notion de voisinage au cas des infinis :