Proposition 1.5 (Limite en un point du domaine)**.** *Si $a \in A$, et si $f(x)$ admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.*

Éléments de preuve. Soit ℓ est la limite de f en a. Puisque a vérifie toujours $|a - a| \leq \eta$, on doit avoir, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|f(a) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Avec les notations de la définition, soit B une partie de E. On note

$$f(B) = f(A \cap B) = \{f(x), x \in A \cap B\} = \{y \in F \mid \exists x \in B, f(x) = y\}$$

Il s'agit donc de l'image directe de B par f (étendu au cas où B n'est pas inclus dans le domaine de f). La définition de la limite peut alors se réécrire de façon plus synthétique. □

Proposition 1.6 (Réexpression de la définition métrique de la limite)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de X. Soit $f : A \longrightarrow F$, et $a \in \overline{A}$, et $b \in F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

1.2 Limites infinies lorsque $B = \mathbb{R}$

Lorsque $B = \mathbb{R}$, on peut, comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, considérer des limites infinies.

Définition 1.7 (Limite infinie en un point adhérent au domaine, définition métrique)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $B \subset E$ une partie de E. Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, et $a \in \overline{B}$. On dit que :*

(i) *$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in B, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A;$$

(ii) *$f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in B, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq A;$$

Exemple 1.8. *On considère dans cet exemple (et ceux qui suivent) C comme $\mathbb{R}$-e.v.n., pour la norme définie par le module. Étudier la limite en z_0 de $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \frac{1}{|1-z_0|}$.*

Remarque 1.9. *On peut réexprimer la définition de la sorte : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \ f(B(x, \epsilon)) \subset [A, +\infty].$$

1.3 Limite en l'infini

Lorsque $E = \mathbb{R}$, et $+\infty$ est adhérent à A (donc A non majoré), on peut définir, comme dans le cas de fonctions réelles, des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Définition 1.10 (Limites en $+\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$)**.** *Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n., et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non majorée de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq \lambda \implies \|f(x) - b\|_F < \epsilon;$$

ou, de façon équivalente, si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ f([\lambda, +\infty]) \subset B(b, \epsilon).$$

Exemple 1.11. *Étudier la limite dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de la fonction $x \mapsto f_x$ lorsque x tend vers $+\infty$, où f_x est la fonction définie par*

$$f_x(t) = (1-t)t^x.$$

Remarque 1.12. *Le cas de la convergence de suites à valeurs dans un e.v.n. $(F, \|\cdot\|_F)$ est un cas particulier de cette définition, lorsque $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.*

On peut adapter cette définition dans le cas où $(E, \|\cdot\|_E)$ est un e.v.n. quelconque, mais au lieu de faire tendre x vers un infini dans une direction précise, on fait tendre x vers un infini non directionnel, c'est-à-dire qu'on fait tendre $\|x\|$ vers $+\infty$.

Définition 1.13 (Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de E. Soit $f : A \to F$. On suppose que A n'est pas borné. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in A,\ \|x\|_E \geq A \implies \|f(x) - b\|_F \leq \epsilon.$$

Exemple 1.14. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Montrer que $f(z)$ tend vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$.*

Remarque 1.15. *Toutes les définitions données dans le cadre des fonctions réelles (notamment les limites infinies ou les limites en des points infinis) ont été données, dans le cadre du programme de première année, dans le cas où f est définie sur un intervalle (ou une union finie d'intervalles) et où a est un point de cet intervalle ou une extrémité. Cette contrainte avait pour but de se limiter à des points adhérents au domaine, mais sans le dire. Les définitions s'étendent sans peine au cas d'un point $a \in X$, éventuellement infini (on rappelle que $+\infty \in X$ si et seulement si X n'est pas majoré).*

Exemple 1.16. *Soit f définie sur $\mathbb{Q}$ par $f(x) = \frac{1}{q}$ où $x = \frac{p}{q}$ est la représentation irréductible de x (le signe éventuel se reportant sur p). Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$.*

1.4 Limites : point de vue topologique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. On rappelle qu'on a étendu, dans le cas réel, la notion de voisinage au cas des infinis :