Fonctions continues sur un e.v.n.

Le but de ce chapitre est d'étendre la notion de continuité aux applications d'un e.v.n. dans un autre. Certains résultats d'analyse réelle se généralisent dans ce cadre : le théorème de Heine, le théorème des bornes atteintes (à juste titre aussi appelé théorème de compacité), et le théorème des valeurs intermédiaires, qui nécessite, pour sa généralisation, d'introduire la notion de connexité par arcs. Nous étudierons pour terminer la continuité des applications linéaires.

1. Continuité sur un e.v.n.

1.1 Limites

Définition 1.1 (Limite finie en un point adhérent au domaine, définition métrique)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de E. Soit $f : A \longrightarrow F$, et $a \in \overline{A}$, et $b \in F$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2. *La signification de cette définition :*

- $\forall \varepsilon > 0$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... »

- $\exists \eta > 0$: « ... il existe une petite boule de rayon η centrée en a, quitte à prendre η très petit ... »

- $\forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \eta \implies \ldots : \cdots$ tel que si x est à la fois dans A et dans cette boule ... »

- $\ldots \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon : \cdots$ alors $f(x)$ est proche à ε près de b.

Autrement dit : « À condition de prendre $x \in A$ suffisamment proche de a, on peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b ».

Remarque 1.3.

1. *L'hypothèse $a \in \overline{A}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.*
2. *L'inégalité à obtenir est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.*
3. *On peut généraliser cette définition à des fonctions définies entre deux espaces métriques. La continuité en a s'exprime alors de la manière suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ d_E(x, a) < \eta \implies d_F(f(x), b) < \varepsilon,$$

où d_E et d_F sont les distances sur E et F respectivement.

Proposition 1.4. *On peut remplacer une ou plusieurs des inégalités larges $|x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - b| \leq \varepsilon$ par des inégalités strictes, cela donne une définition équivalente*

Éléments de preuve. Le quantificateur universel sur ε nous assure que l'on peut aussi remplacer ε par $\varepsilon/2$. On déduit alors l'équivalence de la chaîne d'inclusions :

$$B(b, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(b, \varepsilon) \subset B(b, \varepsilon)$$

et des inclusions similaires avec a et $\frac{\eta}{2}$ (il sera alors peut-être nécessaire de considérer comme valeur de sortie $\frac{\eta}{2}$ et non η, ce qui nous donne aussi la validité de notre quantification existentielle). □

Proposition 1.5 (Limite en un point du domaine)**.** *Si $a \in A$, et si $f(x)$ admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.*

Éléments de preuve. Soit ℓ est la limite de f en a. Puisque a vérifie toujours $|a - a| \leq \eta$, on doit avoir, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|f(a) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Avec les notations de la définition, soit B une partie de E. On note

$$f(B) = f(A \cap B) = \{f(x), x \in A \cap B\} = \{y \in F \mid \exists x \in B, f(x) = y\}$$

Il s'agit donc de l'image directe de B par f (étendu au cas où B n'est pas inclus dans le domaine de f). La définition de la limite peut alors se réécrire de façon plus synthétique. □

Proposition 1.6 (Réexpression de la définition métrique de la limite)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de X. Soit $f : A \longrightarrow F$, et $a \in \overline{A}$, et $b \in F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

1.2 Limites infinies lorsque $B = \mathbb{R}$

Lorsque $B = \mathbb{R}$, on peut, comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, considérer des limites infinies.

Définition 1.7 (Limite infinie en un point adhérent au domaine, définition métrique)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $B \subset E$ une partie de E. Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, et $a \in \overline{B}$. On dit que :*

(i) *$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in B, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A;$$

(ii) *$f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in B, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq A;$$

Exemple 1.8. *On considère dans cet exemple (et ceux qui suivent) C comme $\mathbb{R}$-e.v.n., pour la norme définie par le module. Étudier la limite en z_0 de $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \frac{1}{|1-z_0|}$.*

Remarque 1.9. *On peut réexprimer la définition de la sorte : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \ f(B(x, \epsilon)) \subset [A, +\infty].$$