3.2 Décompositions

Lemme 3.10. *Soit $n \geq 2$ et $\varphi : \mathfrak{S}_{n-1} \to \mathfrak{S}_n, \sigma \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n-1), n)$. φ est un morphisme de groupes et $\varphi(\mathfrak{S}_{n-1}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(n) = n\}$.*

Théorème 3.11 (Décomposition)**.** *Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de transpositions.*

Exercice 3.12. *Soit c un cycle. Donner une décomposition de c en produit de transpositions.*

Définition 3.13 (Orbite)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in [1, n]$. L'orbite de x est l'ensemble $\{\sigma^p(x), p \in \mathbb{N}\}$.*

Exercice 3.14.

1. *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orbite de chacun des entiers de $[1, 6]$.*
2. *Montrer qu'il existe un entier $p \in [1, n]$ tel que l'orbite de k soit $\{\sigma^\ell(k), \ell \in [0, p-1]\}$.*

Proposition 3.15. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les orbites de σ forment une partition de $[1, n]$. On notera $o(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.*

Théorème 3.16. *Toute permutation se décompose comme un produit de cycles à supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Exercice 3.17. *Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 2 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints.*

3.3 Signature d'une permutation

Définition 3.18 (Signature)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La signature de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, est le nombre $(-1)^{n-o(\sigma)}$.*

Exercice 3.19. *Soit θ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. Déterminer la signature de θ.*

Théorème 3.20 (Morphisme)**.** *L'application ε est un morphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe $\{(-1, 1), \times\}$.*

Exercice 3.21 (Inversions)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le nombre d'inversions de σ, noté $I(\sigma)$, est le cardinal de $\{(i, j) : i < j \text{ ET } \sigma(j) < \sigma(i)\}$. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{I(\sigma)}$.*

Corollaire 3.22. *Le nombre de transpositions dans la décomposition d'une permutation est de parité constante.*

Exercice 3.23 (Groupe alterné)**.** *L'ensemble $\mathfrak{A}_n = Ker(\varepsilon)$ est le groupe alterné d'ordre n.*

1. *Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe.*
2. *Soit $n \geq 2$. Montrer que $|\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$.*

Exercice 3.24 (Signature). *Étudier la parité des permutations suivantes :*

1.
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3.
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ n & n+1 & n-1 & n+2 & \cdots & 1 & 2n \end{pmatrix}$$

Exercice 3.25 (Conjugaison des transpositions). *Soit σ une permutation et $\theta_{i,j}$ une transposition de $[1, n]$.*

1. Montrer que $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$.

2. En déduire que pour tout $n \geq 3$, le centre de $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité.

Exercice 3.26 (Systèmes de générateurs). *Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par :*

1. $\{(1, i), i \in [2, n]\}$

2. $\{(i, i+1), i \in [1, n-1]\}$

3. $\{(1, 2)$ *et* $(2, 3, \ldots, n, 1)\}$

Exercice 3.27 (Groupe alterné). *Montrer que tout produit de deux transpositions peut s'écrire comme un produit de cycles d'ordre 3. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les cycles d'ordre 3.*

Exercice 3.28 (Commutant d'un cycle). *Soit $c = (2, 3, \ldots, n, 1)$. Déterminer $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma c = c\sigma\}$.*

Exercice 3.29 (Morphismes de $\mathfrak{S}_n$). *Soit $\varphi : (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ un morphisme de groupe.*

1. Montrer que si θ_1 et θ_2 sont deux transpositions, alors $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$.

2. En déduire que φ est l'application signature ou l'application constante égale à 1.

Exercice 3.30 (Dérangements). *Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Calculer le nombre D_n de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de bijections $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telles que pour tout $k \leq n$, $f(k) \neq k$.*